

Esercizio 8 Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento associato ad uno spazio inerziale, l'asse x sia verticale discendente: $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_x$. Un punto materiale P_1 di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse x e una molla di costante elastica $h > 0$ è tesa tra P_1 e il punto fisso origine del sistema O . Una estremità di una sbarretta, di lunghezza ℓ e priva di massa, è incernierata in P_1 e può ruotare vincolata nel piano Oxy . All'altra estremità della sbarretta è solidale un punto materiale P_2 di massa M . Si utilizzino i paramentri Lagrangiani x di P_1 e l'angolo φ dall'asse positivo delle x alla sbarretta, orientato positivamente in senso anti-orario.

a. Dopo aver motivato in dettaglio la costruzione delle funzioni energia cinetica $T(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi})$ ed energia potenziale $\mathcal{U}(x, \varphi)$, determinare un equilibrio stabile (x_E, φ_E) .

b. Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a (x_E, φ_E) .

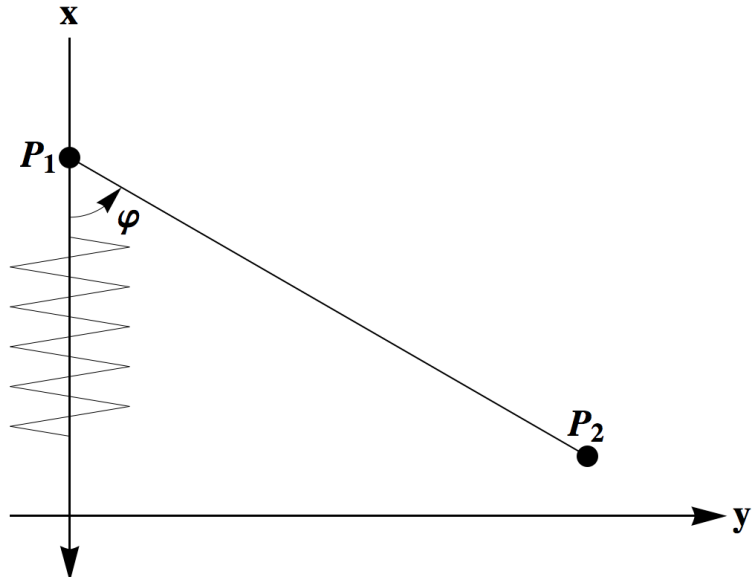
c. Si utilizzino ora i parametri Lagrangiani (z, φ) , dove $z := x - x_E$. Si supponga che sia pure presente un forza di resistenza di tipo viscoso agente su P_1 : $\mathbf{F}^{visc} = -k \mathbf{OP}_1$.

Scrivere le componenti della sollecitazione relative alla forza viscosa, Q_x^{visc} , Q_φ^{visc} . Dal momento che la loro espressione è lineare, le equazioni di Lagrange linearizzate attorno a (x_E, φ_E) per questo nuovo problema coincidono con la linearizzazione calcolata per rispondere al punto **b** sommata al contributo delle Q appena calcolate. Considerare le nuove equazioni linearizzate e studiare in dettaglio la soluzione del problema di Cauchy

$$z(0) = z_0 \neq 0, \dot{z}(0) = 0,$$

$$\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Si mostri che la soluzione ha tre tipi diversi di comportamento per diverse scelte di k nei positivi.



SVOLGIMENTO

a. Le posizioni dei punti sono $OP_1 = (x, 0)$ e $OP_2 = (x + \ell \cos \varphi, \ell \sin \varphi)$. Segue che l'energia cinetica che associata al punto P_1 è $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, quella di P_2 è $\frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\varphi}^2 - 2\ell\dot{x}\dot{\varphi}\sin \varphi)$. Quindi l'energia cinetica totale è

$$T = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\ell^2\dot{\varphi}^2 - 2\ell\dot{x}\dot{\varphi}\sin \varphi).$$

Le forze attive sono quella gravitazionale e quella elastica, quindi (tenuto conto del fatto che l'asse delle x è verticale discendente)

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{P_1}^g + \mathcal{U}_{P_2}^g + \mathcal{U}_{P_1O}^h = -mgx - Mg(x + \ell \cos \varphi) + \frac{h}{2}x^2$$

b. Per determinare egli equilibri dobbiamo annullare il gradiente di $\mathcal{U}$, che è

$$\nabla \mathcal{U} = \begin{pmatrix} -mg - Mg + hx \\ Mg\ell \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Da cui risulta che $x_E = \frac{m+M}{h}g$ e $\varphi_E = 0, \pi$. Per decidere quale tra questi equilibri è stabile, bisogna calcolare l'Hessiana dell'energia potenziale, che è

$$H\mathcal{U} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & Mg\ell \cos \varphi \end{pmatrix},$$

da cui segue che l'equilibrio stabile è quello con $\varphi_E = 0$. La matrice dell'energia cinetica in generale e nell'equilibrio sono rispettivamente

$$A(x, \varphi) = \begin{pmatrix} M+m & -\ell M \sin \varphi \\ -\ell M \sin \varphi & M\ell^2 \end{pmatrix}, \quad A(x_E, 0) = \begin{pmatrix} M+m & 0 \\ 0 & M\ell^2 \end{pmatrix}.$$

Seque che le equazioni delle piccole oscillazioni sono quelle associate al sistema lineare

$$\begin{pmatrix} M+m & 0 \\ 0 & M\ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h & 0 \\ 0 & -Mg\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

dove ξ, η sono gli scostamenti dall'equilibrio. Queste che sono le equazioni di due oscillatori armonici di frequenza $\sqrt{\frac{h}{M+m}}$ e $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$, che sono le frequenze delle piccole oscillazioni.

c. La coordinata $z = x - x_E$ non è altro che la ξ delle piccole oscillazioni, i.e. lo scostamento dall'equilibrio. Le equazioni con l'aggiunta della viscosità non cambiano se non per il contributo delle componenti Lagrangiane della sollecitazione associate alla forza viscosa. Siccome la componente Lagrangiana della sollecitazione associata alla forza viscosa è $-k\dot{z}e_x \cdot e_x dz = -k\dot{z}dz$, si ha che le equazioni scritte al punto **b** sommate alla componente appena calcolata diventano

$$\begin{cases} \ddot{z} = -\frac{h}{M+m}z - \frac{k}{M+m}\dot{z} \\ \ddot{\varphi} = \frac{g}{\ell}\varphi \end{cases}$$

Le equazioni per φ sono triviali, mentre quelle per z hanno tre possibili evoluzioni: o $\delta^2 = k^2 - 4h(m+M) > 0$ (alta viscosità), nel qual caso le soluzioni sono del tipo $ae^{-\frac{k}{M+m}t+\delta t} + be^{-\frac{k}{M+m}t-\delta t}$, oppure $-\delta^2 = 4h(m+M) - k^2 > 0$ (bassa viscosità), nel qual caso le soluzioni sono del tipo $e^{-\frac{k}{M+m}t}(a \cos(\delta t) + b \sin(\delta t))$. Il terzo tipo di comportamento è associato alla scelta di $k^2 = 4h(m+M)$, che porta ad una soluzione del tipo $ae^{-\frac{k}{M+m}t} + bte^{-\frac{k}{M+m}t}$. La determinazione dei valori di a, b che soddisfano alle condizioni al bordo è un conto algebrico. $\square$