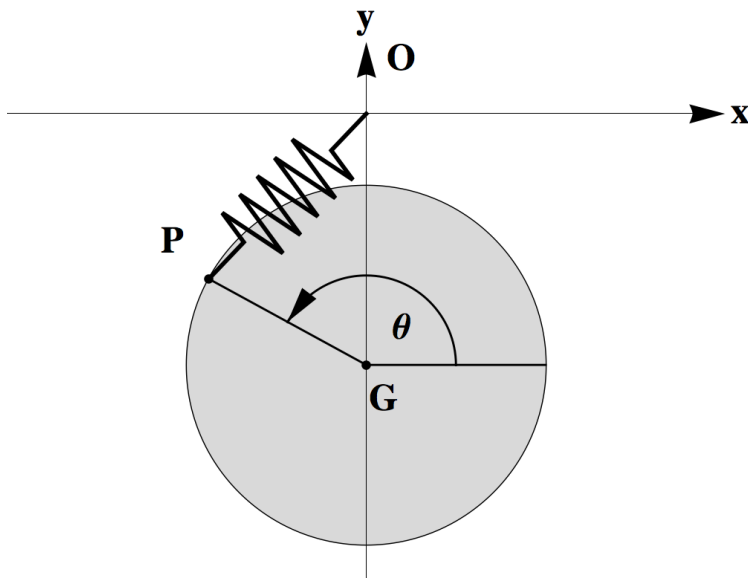


Esercizio 9 In un sistema di riferimento Oxy , con y verticale ascendente, un disco omogeneo di massa m e raggio R ha centro vincolato all'asse delle y .

Una molla di costante elastica k è fissata ad un punto del bordo del disco. L'altro capo della molla è attaccato all'origine del sistema di riferimento. Sul sistema agisce la gravità. Si scelgano come coordinate Lagrangiane y , la coordinata del centro di massa G , e ϑ , l'angolo tra il segmento GP e l'asse delle x (vedi figura).



a. Si scriva la Lagrangiana del sistema (il momento di inerzia di un disco è $I_G = \frac{m}{2}R^2$).

b. Si determinino tutti gli equilibri e si studi la stabilità solo degli equilibri con $y \neq 0$.

c. Assumendo che $k = 2\frac{mg}{R}$, si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni all'equilibrio che è stabile per qualsiasi scelta dei parametri.

SVOLGIMENTO

a. I punti e gli atti di moto rilevanti per il sistema sono

$$OP = (R \cos \vartheta, y + R \sin \vartheta), \quad OG = (0, y), \quad \dot{OG} = (0, \dot{y}).$$

L'energia cinetica del sistema è $T = \frac{1}{2}m|v_G|^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$. In questo caso il primo termine diventa semplicemente $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, mentre la velocità angolare è $\dot{\vartheta}e_3$ e quindi il secondo termine è $\frac{1}{2}\frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2$. Quindi

$$T(y, \vartheta, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\vartheta}^2\right)$$

I potenziali in gioco sono quello gravitazionale e quello della molla. $V = V_g + V_k = mgy_G + \frac{k}{2}|OP|^2 = mgy + \frac{k}{2}\left((R \cos \vartheta)^2 + (y + R \sin \vartheta)^2\right)$. Un conto, a meno di costante, porge

$$V(x, y, \vartheta) = mgy + \frac{k}{2}(y^2 + 2Ry \sin \vartheta)$$

La Lagrangiana è $L = T - V$.

b. Per determinare gli equilibri bisogna studiare il gradiente del potenziale

$$\nabla V = \begin{pmatrix} mg + ky + kR \sin \vartheta \\ kRy \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

La seconda dice che o $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ oppure $y = 0$. In questo secondo caso si ha che $\sin \vartheta = -\frac{mg}{kR}$, che porge due soluzioni, $-\frac{\pi}{2} \pm \bar{\vartheta}$ se $\frac{mg}{kR} < 1$, una soluzione $\frac{\pi}{2}$ se $\frac{mg}{kR} = 1$ e nessuna se $\frac{mg}{kR} > 1$. Nel primo caso invece si ha che $y = -\frac{mg}{k} \mp R$. Oltre ai due eventuali equilibri con $y = 0$ si hanno gli equilibri $\left(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Per studiare la stabilità degli equilibri usiamo il teorema della Hessiana non degenera. La matrice Hessiana di V è

$$HessV = \begin{pmatrix} k & kR \cos \vartheta \\ kR \cos \vartheta & -kRy \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Calcolata negli equilibri con $y \neq 0$ si ha

$$HessV\left(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR\left(\frac{mg}{k} + R\right) \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, quindi l'equilibrio $\left(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}\right)$ è stabile, e

$$HessV\left(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR\left(-\frac{mg}{k} + R\right) \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha un autovalore negativo se e solo se $R - \frac{mg}{k} < 0$, ovvero quando $1 < \frac{mg}{kR}$ allora l'equilibrio $\left(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}\right)$ è instabile. Nel caso invece in cui $1 > \frac{mg}{kR}$ allora l'equilibrio $\left(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}\right)$ è stabile.

c. L'equilibrio che è sempre stabile indipendentemente dai parametri è $\left(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}\right)$. Assumendo che $k = 2\frac{mg}{R}$ si ha che la matrice Hessiana di V all'equilibrio diventa

$$HessV = \begin{pmatrix} 2\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 3mgR \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico da calcolare è

$$\det \left[\begin{pmatrix} 2\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 3mgR \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix} \right]$$

Le matrici sono a blocchi e porgono $\omega = \sqrt{2\frac{g}{R}}$ e $\omega = \sqrt{6\frac{g}{R}}$. □