Ricerca Operativa
A.A. 2008/2009

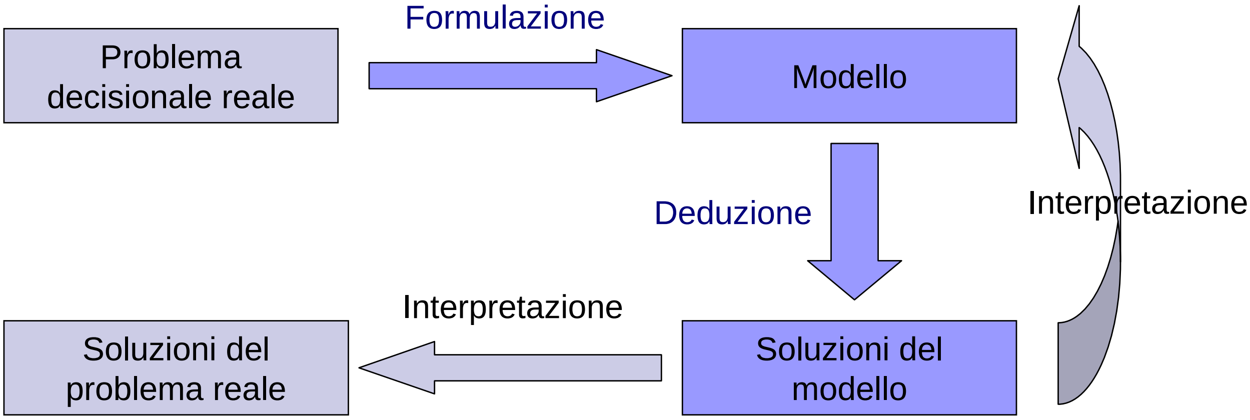
Esercizi di modellazione

Docente

- Luigi De Giovanni
- Dipartimento di Matematica Pura e Applicata (Torre Archimede) – uff. 419
- Tel. 049 827 1349
- email: luigi@math.unipd.it
- www.math.unipd.it/~luigi

- Ricevimento: Lunedì, h 15.00 – 17.00 (su appuntamento via e-mail)

Il metodo della Ricerca Operativa



- Formulazione: modelli matematici, modelli su grafo, modelli di simulazione, modelli di teoria dei giochi etc.
- Deduzione: metodi quantitativi, algoritmi efficienti. Ausilio di strumenti informatici: software di ottimizzazione

Esempio

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi, 160 t di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 t di concime per ettaro di lattuga, e 3 t di tuberi e 20 di concime per le patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

Costruzione del modello

- Cosa bisogna decidere?
  $\Rightarrow$ variabili decisionali
- Quale è l'obiettivo?
  $\Rightarrow$ funzione obiettivo
- Come sono caratterizzate le soluzioni ammissibili?
  $\Rightarrow$ vincoli del problema
- Modelli matematici: funzione obiettivo e vincoli sono espressi come relazioni matematiche tra le variabili decisionali
- VEDI NOTE

Modello matematico

- Variabili decisionali:

x_L, x_P: quantità in ettari da destinare a lattuga e a patate

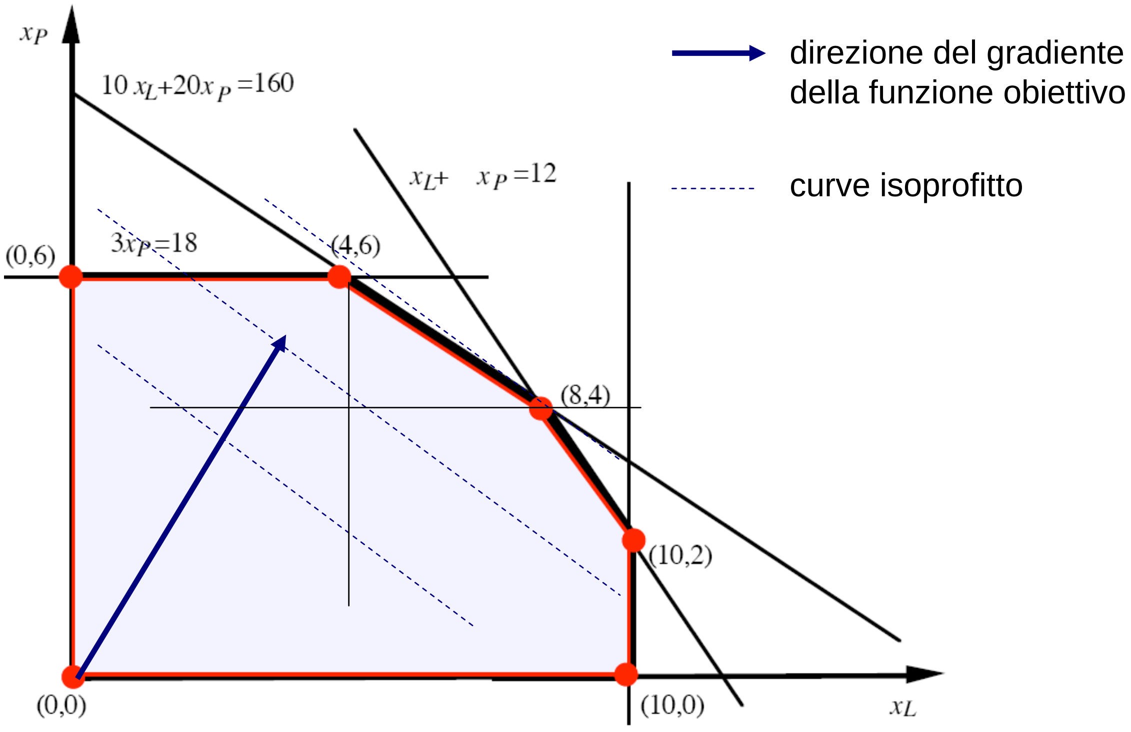
- Funzione obiettivo:

$$max\ 3000\ x_L + 5000\ x_P$$

- Sistema dei vincoli:

$x_L + x_P \leq 12$	(ettari disponibili)
$7\ x_L \leq 70$	(semi disponibili)
$3\ x_P \leq 18$	(tuberi disponibili)
$10\ x_L + 20\ x_P \leq 160$	(concime disponibile)
$x_L \geq 0,\ x_P \geq 0$	(dominio)

Soluzione: metodo grafico

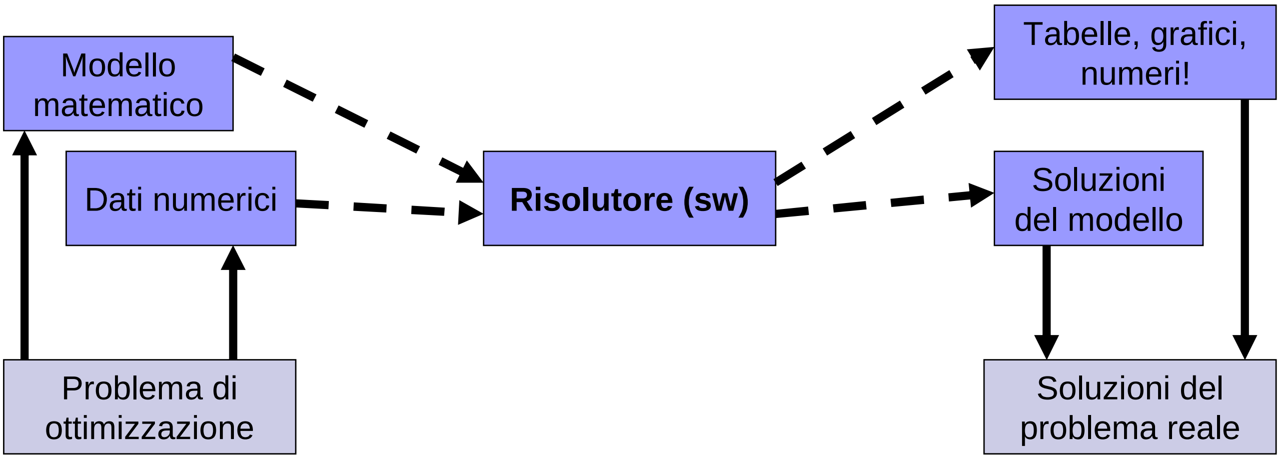


Soluzione: sw di ottimizzazione

- Risolutore di Excel
- Software di ottimizzazione
  - Linguaggi di modellazione matematica (AMPL, Mosel, OPL, Lingo, GAMS etc.)
  - Motori di ottimizzazione (Cplex, Xpress, GPLK, LPsolve etc.)
- Importante disporre di un buon modello matematico: considereremo modelli di programmazione lineare (PL)

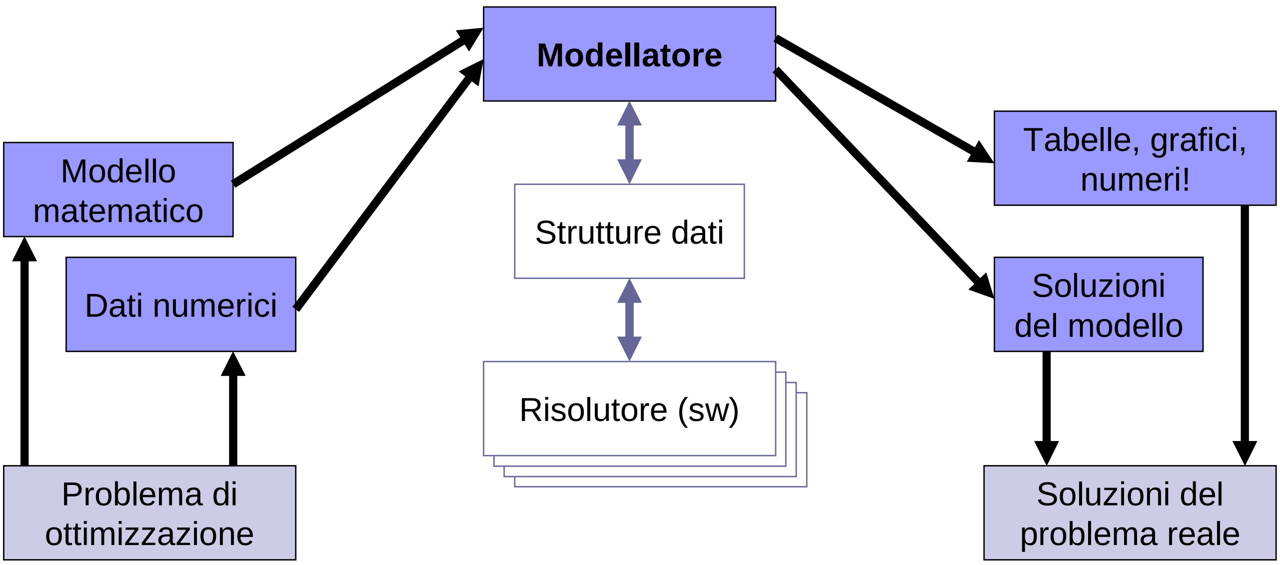
Utilizzo di solver

Un **solver** (o risolutore) è un software che riceve in input una descrizione di un problema di ottimizzazione e produce in output la soluzione ottima del modello e informazioni ad essa collegate.



Ruolo dei modellatori

Un **modellatore** fornisce un'interfaccia verso un risolutore.



Obiettivi dei modellatori

- Disporre di un **linguaggio** semplice:
  - ad alto livello;
  - simile a quello di modellazione (linguaggio matematico);
  - formalmente strutturato;
  - possibilità di commenti.
- Mantenere la **separazione tra modello e dati** del problema: per cambiare l'istanza basta cambiare i dati, non il modello.
- Dialogare con **diversi solver** (strutture di I/O standardizzate).
- Linguaggio per script.

Possibili configurazioni

Modellatori:

- Foglio elettronico
- AMPL
- Mosel
- Lingo
- …

Solver:

- Risolutore per fogli elettronici
- Cplex (PL, PLI)
- XPress
- Minos (PNL)
- Lindo (motore di ottimizzazione)
- GPLK (librerie di ottimizzazione)
- Lp_solve
- …

Formulazione generale di un modello di programmazione lineare

$\min (\max)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n (+cost.)$

subject to (s.t., soggetto a, s.a)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \geq (=, \leq)\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \geq (=, \leq)\ b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \geq (=, \leq)\ b_m$$

$x_j \in \Re_{(+)}$ (x_j intere)

z : funzione obiettivo da minimizzare (min) o massimizzare (max)

x_j : variabili decisionali (incognite)

- reali (eventualmente non negative)
- intere (eventualmente non negative)
- binarie ($x_j \in \{0,1\}$)

} Programmazione lineare intera (PLI)

c_j : coefficienti di costo (min) o profitto (max)

a_{ij} : coefficienti tecnologici

b_i : termini noti

Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

Modello PLI

- Siano x_1, x_2 e x_3 le quantità di cibi a base di verdura, carne e frutta, rispettivamente

$$\min \quad 4x_1+10x_2+7x_3 \qquad \text{(costo giornaliero dieta)}$$

$s.t.$

$$5x_1+15x_2+4x_3 \geq 20 \qquad \text{(proteine)}$$
$$6x_1+10x_2+5x_3 \geq 30 \qquad \text{(ferro)}$$
$$5x_1+3x_2+12x_3 \geq 10 \qquad \text{(calcio)}$$

$$x_i \in \Re_+, \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

Modello PLI

- Siano x_1 e x_2 il numero di telefonate da fare al mattino e alla sera, rispettivamente

$$
\begin{array}{lll}
\min & 1.1\, x_1 + 11.6\, x_2 & \text{(costo totale telefonate)} \\
s.t. & & \\
& 0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 150 & \text{(donne sposate)} \\
& 0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 110 & \text{(donne non sposate)} \\
& 0.1x_1 + 0.3x_2 \geq 120 & \text{(uomini sposati)} \\
& 0.1x_1 + 0.15x_2 \geq 100 & \text{(uomini non sposati)}
\end{array}
$$

$$x_i \in Z_+,\ \forall i \in \{1, 2\}$$

Trasporto di frigoriferi

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

Modello PLI

- Sia x_{ij} il numero di frigoriferi prodotti nello stabilimento i e smistati nel magazzino j

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 6\,x_{A1}+8\,x_{A2}+3\,x_{A3}+4\,x_{A4}+ \\
+ \quad & 2\,x_{B1}+3\,x_{B2}+1\,x_{B3}+3\,x_{B4}+ \\
+ \quad & 2\,x_{C1}+4\,x_{C2}+6\,x_{C3}+5\,x_{C4}
\end{aligned}
$$

s.t.

$x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4} \leq 50$ (capacità produttiva stabilimento A)
$x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4} \leq 70$ (capacità produttiva stabilimento B)
$x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4} \leq 20$ (capacità produttiva stabilimento C)

$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \geq 10$ (domanda magazzino 1)
$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \geq 60$ (domanda magazzino 2)
$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \geq 30$ (domanda magazzino 3)
$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \geq 40$ (domanda magazzino 4)

$x_{ij} \in Z_+, \ \forall i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

Turni in ospedale

Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

Modello PLI

- Siano *lun*, *mar*, *mer*, *gio*, *ven*, *sab* e *dom* il numero di infermieri in cui turno inizia di lunedì,… domenica

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & lun & +mar & +mer & +gio & +ven & +sab & +dom & & \\
s.t. & & & & & & & & & \\
& lun & & & +gio & +ven & +sab & +dom & \geq 17 & \text{(presenze lunedì)} \\
& lun & +mar & & & +ven & +sab & +dom & \geq 13 & \text{(presenze martedì)} \\
& lun & +mar & +mer & & & +sab & +dom & \geq 15 & \text{(presenze mercoledì)} \\
& lun & +mar & +mer & +gio & & & +dom & \geq 19 & \text{(presenze giovedì)} \\
& lun & +mar & +mer & +gio & +ven & & & \geq 14 & \text{(presenze venerdì)} \\
& & mar & +mer & +gio & +ven & +sab & & \geq 16 & \text{(presenze sabato)} \\
& & & +mer & +gio & +ven & +sab & +dom & \geq 11 & \text{(presenze domenica)}
\end{array}
$$

$$lun, mar, mer, gio, ven, sab, dom \in Z_+$$

Localizzazione di servizi

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella. Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Q.re 1	5	10	20	30	30	20
Q.re 2	10	5	25	35	20	10
Q.re 3	20	25	5	15	30	20
Q.re 4	30	35	15	5	15	25
Q.re 5	30	20	30	15	5	14
Q.re 6	20	10	20	25	14	5

Modello PLI

- Sia $x_i=1$, se viene aperto il CUP nel quartiere *i*, 0 altrimenti

$$
\begin{array}{llllllll}
min & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & \\
s.t. & & & & & & & \\
 & x_1 & + x_2 & & & & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 1)} \\
 & x_1 & + x_2 & & & & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 2)} \\
 & & & x_3 & + x_4 & & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 3)} \\
 & & & x_3 & + x_4 & + x_5 & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 4)} \\
 & & & & x_4 & + x_5 & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 5)} \\
 & & x_2 & & & + x_5 & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 6)}
\end{array}
$$

$x_i \in \{0,1\}$