Corso di logica per informatica
Esercitazione 1

0.1 Esempi di asserzioni traducibili con connettivi proposizionali

0.1.1 Implicazione e negazione

Ricordiamo che il sequente $A \vdash B$ vuol dire "A vera (asserita) *comporta* B vera". In particolare $\vdash A$ vuol dire "A è vera" (senza altre ipotesi!). Come si rappresenta "A è falsa"? Rappresentiamolo con $A \vdash$. Per dire che A è falsa in termini di vero, dobbiamo negare una verità. Lo facciamo dicendo che supporre A vera *comporta* una lampante contraddizione. Ad esempio, per dire "Quello li' non è un medico" ci capita di dire "Se quello li' è un medico, io sono Napoleone". Questo è il modo in cui viene considerata la negazione intuizionista. Se indichiamo la contraddizione (una qualunque contraddizione) con $\perp$, "A è falsa" si scrive anche $A \vdash \perp$. Questa diventa a sua volta $\vdash A \rightarrow \perp$. La proposizione $A \rightarrow \perp$ abbreviata $\neg A$, rappresenta la negazione di A (non A).

Esempio 1:
Considerare le 4 asserzioni

a. Lavorando, si guadagna.

b. Senza lavorare, non si guadagna.

c. Si lavora senza guadagnare.

d. Si guadagna senza lavorare.

Formalizzare le asserzioni con connettivi proposizionali. Quali sono conseguenza una dell'altra? Quali sono contraddittorie fra loro?

Esempio 2:
Da uno scambio di idee fra un governo e un'opposizione di vari anni fa:
Un rappresentante del governo dichiara: "Saremo anche ministri incompetenti, ma siamo onesti"
Il rappresentante dell'opposizione lo contraddice come segue: "Se siete incompetenti e fate i ministri siete disonesti"

Esplicitare dove si trova la contraddizione fra le due affermazioni. Porre ad esempio A=*essere incompetenti* B=*essere (fare i) ministri* C=*essere onesti*, considerando le coppie onesto/disonesto e competente/incompetente come coppie di contrari ottenuti per negazione uno dall'altro.

Teniamo per buona l'affermazione dell'opposizione. Dire allora quali valgono fra:

a. Se una persona è un ministro ed è onesta, non è incompetente.

b. Se una persona è un ministro ed è disonesta, è incompetente.

c. Se una persona è un ministro ed è competente, è onesta.

d. Per essere onesti essendo incompetenti è necessario non fare i ministri.

e. Per essere onesti essendo incompetenti è sufficiente non fare i ministri.

Esempio 3:

Delle seguenti, il caso a. è il "caso-base". Certe sono valide e certe no. Discutere quali.

a. Il signor Rossi porta con sè l'ombrello quando piove. Oggi il signor Rossi non ha con sè l'ombrello. Allora non piove.

b. Il signor Rossi porta con sè l'ombrello quando piove oppure è raffreddato. Oggi il signor Rossi non ha con sè l'ombrello. Allora non piove e il signor Rossi non è raffreddato.

c. Il signor Rossi porta con sè l'ombrello quando piove oppure è raffreddato. Oggi il signor Rossi non ha con sè l'ombrello. Allora non piove oppure il signor Rossi non è raffreddato.

d. Il signor Rossi porta con sè l'ombrello quando piove ed è raffreddato. Oggi Rossi non ha con sè l'ombrello. Allora non piove oppure il signor Rossi non è raffreddato.

e. Il signor Rossi porta con sè l'ombrello quando piove ed è raffreddato. Oggi Rossi non ha con sè l'ombrello. Allora non piove e il signor Rossi non è raffreddato.

Nel caso d. non c'è una derivazione in LJ. Quando voi concludete che non piove oppure il signor Rossi non è raffreddato, siete in grado di stabilire quale delle due? Questo è un problema! Vediamo qui sotto un caso in cui la cosa è di estrema importanza.

0.1.2 Disgiunzione

Esempio 4:

Caso giudiziario dei coniugi Bebaui (Torino, anni '50) - un po' romanzato per necessità logiche. I fatti appurati furono:
1) Uno dei due ha ucciso il signor X.
2) Non sono complici.

Questi "fatti" non hanno vera rilevanza giuridica: la colpevolezza va determinata individualmente, non per coppie! Al processo, i due si difesero individualmente, accusandosi a vicenda. La difesa di lei dimostrò che, se anche fosse stata lei, lui avrebbe dovuto essere suo complice. La difesa di lui dimostrò che, se anche fosse stato lui, lei avrebbe dovuto essere sua complice. Furono entrambi assolti. Fu uno smacco per la giustizia.

Esempio 5:

Vediamo meglio che $\vee$ è un connettivo che traduce bene l'idea di "e" nel senso di "mancano tutti e due".

Il carburante della mia macchina è - benzina o gas -. Se c'è carburante (non mi importa quale!), la macchina parte. Se manca carburante, la macchina non parte. Voglio sapere se la mia macchina domattina potrà partire. Controllo. C'è benzina. Allora c'è carburante, quindi la macchina partirà. Oppure: c'è gas. Allora c'è carburante, quindi la macchina partirà. Oppure ancora: Manca la benzina e manca anche il gas. Questo vuol dire che manca carburante, quindi la macchina non partirà. Il principio di riflessione per $\vee$ dice esattamente che "manca carburante", cioè "manca - benzina o gas -" significa "mancano tutti e due".

0.1.3 La regola ex falso quodlibet

Esempio 6:

Sulle buste delle bollette dell'ENEL sta scritto all'incirca: "non esistono incaricati dell'ENEL per riscuotere le bollette. Un incaricato dell'ENEL per riscuotere bollette è un impostore. Se ne arriva uno a casa vostra, denunciatelo!". Notate qui che l'incaricato-impostore è il "non-incaricato", cioè dall'incaricato si crea il falso (l'impostura). In questo caso, dice l'ENEL, potete denunciarlo. La regola dell'ENEL dice dunque: da impostura segue denuncia. La regola del falso di LJ dice di piu': se arriva una impostura, cioè una cosa da cui segue il falso, potete far seguire da quella cosa tutto quello che volete, non limitarvi alla sola denuncia!

0.2 Alcuni sequenti da derivare

Implicazione (lineare, cioè non sono necessarie regole strutturali):

$$(A \to A) \to A = A$$

$$A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$$

$A \to B) \vee (A \to C) \vdash A \to B \vee C$ (il contrario non riesce in LJ, provare!)

Implicazione con contrazione (o regola moltiplicativa di &):

$A \to (A \to B), A \vdash B$

$A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$

$A \& B \to C = A \to (B \to C)$ (giá svolto)

Implicazione con indebolimento:

$B \to C, A \to D \vdash A \vee B \vdash C \vee D$

Negazione: (ricordare la definizione $\neg A \equiv A \to \perp$!)

$A \vdash \neg\neg A$

$A \to B \vdash \neg B \to \neg A$

$\vdash \neg(A \& \neg A)$

$\neg A \& \neg B = \neg(A \vee B)$

$\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \& B)$

$A \vee B \to C, \neg C \vdash \neg A \& \neg B$ (discussa nelle frasette dell'ombrello del paragrafo precedente)

Regola del falso:

$A \& \neg A \vdash B$

$\neg A \vee B \vdash A \to B$

In LK (logica classica)

$\neg\neg A \vdash A$

$\vdash A \vee \neg A$

$A \to B \vdash \neg A \vee B$

$(A \& B) \to C \vdash (A \to C) vee (B \to C)$

$\neg(A \& B) \vdash \neg A \vee \neg B$ (come sopra con $C = \perp$)

$\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$

$A \& B \to C, \neg C \vdash \neg A \vee \neg B$ (frasetta dell'ombrello)

$A \to B \vee C \vdash (A \to B) \vee (A \to C)$ (il contrario é fatto sopra in LJ)