Logica di Base
attraverso il Principio di Riflessione

Giulia Battilotti

Tesi per il Conseguimento del Titolo di Dottore di Ricerca

VIII ciclo

Dottorato di Ricerca in
Logica Matematica e Informatica Teorica

Sede: Università di Siena

A Marco e Marianna

Indice

Ringraziamenti 3

Introduzione **5**

1 Dal principio di riflessione alla logica di base **8**

1.0.1 Nota introduttiva sull'interpretazione dei sequenti del calcolo per la logica di base 8

1.1 Rappresentazione di asserzioni nel linguaggio dei sequenti 9

1.2 Il principio di riflessione 11

1.3 Dal principio di riflessione al calcolo **B** 19

1.4 Alcune caratteristiche del calcolo **B** 24

1.4.1 Simmetria 24

1.4.2 Visibilità e teorema di eliminazione dei tagli 24

1.4.3 Altre caratteristiche del calcolo 26

1.4.4 Negazioni in **B** 29

1.5 Estensioni della logica di base 29

1.5.1 Nota introduttiva 29

1.5.2 Estensioni del calcolo **B** 31

2 Logiche simmetriche e traduzioni **35**

2.1 Logiche simmetriche 35

2.1.1 Equivalenza della logica del vero con quella del falso 35

2.1.2 Il sistema $^{\perp}\mathbf{B}$ e le sue estensioni 36

2.2 Traduzioni 44

2.2.1 Espressione della logica classica e lineare classica nei sistemi simmetrici di base 44

2.2.2 Traduzione della logica classica nell'ortologica e dell'ortologica nell'ortologica di base 49
2.2.3 Traduzione della logica classica nella logica lineare classica e dell'ortologica di base nella logica di base 50
2.2.4 Prova di eliminazione dei tagli per $^{\perp}\mathbf{BS}$ e $\downarrow^{\perp}\mathbf{BS}$ 52

3 Logiche asimmetriche **58**
3.1 Il calcolo lineare intuizionista **BL** 58
3.1.1 Principi di riflessione per **BL** 58
3.1.2 I connettivi lineari intuizionisti 63
3.2 Il calcolo intuizionista **BLS** 64

A Visibilità ed eliminazione dei tagli **67**
A.0.1 Eliminazione del taglio in logica di base **B** e logica di base strutturata **BS** 69
A.0.2 Eliminazione del taglio nelle estensioni della logica di base . . 73

Bibliografia **75**

Ringraziamenti

Il ringraziamento di base per questa tesi lo devo in modo naturale ai miei genitori, Vanni e Luisa, che mi hanno consentito di studiare e che mi hanno comunicato valori tali da farmi considerare importante l'attività di ricerca in logica;

desidero ringraziare altrettanto sentitamente mio marito Marco, che mi ha sempre sostenuta ed incoraggiata ad affrontare il dottorato, anche quando io disperavo, e che è sempre stato entusiasta del mio lavoro;

un grazie infine alla nostra bambina Marianna e ai nonni Silvana, Elio, Luisa, Vanni, che la hanno amorevolmente accudita durante il mio lavoro.

Per quanto riguarda il contenuto della tesi e tutta la mia attività di ricerca, tutta la mia gratitudine va al mio relatore, prof. Giovanni Sambin. Egli mi ha proposto l'argomento della logica di base, che ho poi sviluppato insieme a lui, e che entrambi sentiamo come importante. Spero di aver sviluppato bene i suoi suggerimenti; le manchevolezze e gli errori di questa tesi, comunque, sono miei. Al di là dei temi specifici della tesi, cui accennerò nell'introduzione, volevo qui precisare che gli sono altrettanto grata per il suo modo di intendere la ricerca, con cui mi sono trovata perfettamente in sintonia e che egli ha accettato di condividere con me.

Ringrazio inoltre sentitamente il prof. Silvio Valentini, che è sempre molto disponibile ad ascoltare e discutere di logica, e dà suggerimenti preziosi; colgo l'occasione di ringraziare insieme a lui anche le dott. Silvia Gebellato, Maria Emilia Maietti, Sara Negri.

Infine, ringrazio vivamente la dott. Claudia Faggian per aver deciso di laurearsi sull'argomento della logica di base e avervi poi contribuito con sostanziali miglioramenti e sviluppi.

Desidero inoltre ringraziare (in ordine cronologico):

Il prof. John L. Bell, che ci ha iniziati agli ortoreticoli;

La prof. Maria Luisa Dalla Chiara e il dott. Roberto Giuntini, che ci hanno incoraggiati fin dall'inizio ad affrontare il tema della quantum logic, e che ci hanno invitati a tenere seminari sulla logica di base;

Il dott. Rajeev Goré, che ci ha spiegato argomenti di display logic;

Il prof. Per Martin Löf, per la semantica dei connettivi che ho imparato dalla sua teoria;

Il prof. Settimo Termini, per il suo interesse verso la logica di base;

Il prof. Jean Yves Girard, per la sua logica lineare e per aver consentito ad ascoltare l'argomento della logica di base.

Il prof. V. Michele Abrusci e il prof. Aldo Ursini per le loro osservazioni su questa tesi, che mi saranno utili per continuare la ricerca sull'argomento.

Anche se in argomenti non strettamente legati a questa tesi, desidero ringraziare il prof. Giuseppe Rosolini, che ci ha aiutati nella nostra ricerca.

Ringrazio inoltre il Collegio dei Docenti del Dottorato, il Coordinatore del Dottorato prof. Franco Montagna e i miei colleghi dell'ottavo ciclo, con cui ho studiato logica in un'atmosfera di simpatia.

Ringrazio infine il Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Padova per la cortese ospitalità che mi ha offerto.

Introduzione

Che cos'è la logica di base?

Un tempo tale domanda, forse, non avrebbe neppure avuto senso, dato che la logica era una sola: la logica classica. Ora invece, anche limitandosi al caso delle logiche estensionali non modali, sono parecchie le logiche studiate oltre alla logica classica: si è partiti dalla logica intuizionista, all'inizio del secolo, per arrivare alla logica rilevante e alla logica lineare nelle sue varie formulazioni; inoltre si è studiato anche il campo delle logiche quantistiche. È legittimo, a questo punto, chiedersi se esista una logica che sia, per così dire, il denominatore comune delle logiche estensionali già esistenti.

Tuttavia, per rispondere, è opportuno formulare il problema in termini piú specifici. All'inizio, nella prima metà del '94, lo studio della logica di base è stato fatto cercando una struttura algebrica che fosse contemporaneamente piú debole di algebre di boole, frame, quantale e ortoreticoli. Il fatto di includere gli ortoreticoli tra le strutture studiate ci ha portati a considerare fin dall'inizio le logiche quantistiche come punto di riferimento irrinunciabile. Ciò ha avuto due conseguenze importanti: lo sviluppo di sistemi nuovi per lo studio delle logiche quantistiche e una analisi del significato del connettivo di implicazione che non desse per scontata la validità del teorema di deduzione. Il risultato del lavoro algebrico iniziale è stato esposto a Monselice, al workshop italiano di logica lineare tenuto nell'ottobre del '94, ed è contenuto in [BS0].

Siamo passati presto, verso la fine del '94, a cercare la logica di base come "calcolo dei sequenti con regole deboli", dove fossero provabili esattamente i teoremi validi contemporaneamente in tutte le strutture algebriche citate sopra. Si cercava cioè di rispondere alla domanda:

Quali sono i teoremi di base?

e di rendere esplicite le proprietà per recuperare le logiche piú forti a partire da quella di base. I risultati di questo lavoro sono esposti in [BS].

In seguito, raffinando via via l'idea di "regola debole", si è passati ad affrontare il problema della "miglior presentazione per il calcolo di base" con l'intento di trovare fra l'altro un sistema per l'eliminazione del taglio. Il sistema trovato, esposto in [BFS], risolve tale problema; nel contempo la formulazione delle sue regole è tale da permettere una risposta anche alla seguente domanda:

Qual è il significato di base dei connettivi?

Il fatto che la soluzione a un problema di eliminazione del taglio coincida con la soluzione di tale problema semantico è molto interessante, e ci si augura di poter continuare a far progredire la logica di base tenendo presente, o meglio, attraverso, l'interazione dei due aspetti.

In questa tesi, interpreterò il sistema per la logica di base esposto in [BFS] dal punto di vista del significato dei connettivi. A questo scopo, mi servirò del principio di riflessione. Lo studio del principio di riflessione mi è stato suggerito da G. Sambin alla fine del '95 ed è stato poi influenzato in vario modo dalle considerazioni portate dalla logica di base stessa. L'idea consiste nel concepire ogni connettivo come il modo di importare nel linguaggio logico formale un preesistente legame metalinguistico fra asserzioni. Questo dà luogo ad "equivalenze" fra coppie di giudizi, uno dei quali è un sequente che contiene il connettivo, l'altro un sequente in cui il legame metalinguistico viene trascritto tramite un segno che sia accettabile nel linguaggio dei sequenti. L'equivalenza fra i due sequenti viene intesa come un'equazione definitoria per il connettivo, cioè per le regole che lo caratterizzano: queste infatti vengono ricavate direttamente dall'equivalenza, tramite un metodo uniforme per tutti i connettivi. Nel lavoro di trascrizione da asserzioni a livello metalinguistico a sequenti, vengono definite implicitamente anche le regole strutturali. Infatti, i legami metalinguistici si possono spiegare in piú modi tramite i sequenti. Le regole strutturali, che a livello metalinguistico fanno un tutt'uno con i legami corrispondenti ai segni e quindi ai connettivi, vengono separate dalle regole sui connettivi stessi tramite il lavoro di trascrizione del metalinguaggio in sequenti: esse sono le regole che permettono di identificare due diversi modi di esprimere un legame. Si ottengono così le regole per i connettivi che caratterizzano la logica di base e anche le regole strutturali che servono a trovare le logiche piú forti come estensioni della logica stessa, identificando così la logica di base come "la logica dei connettivi". Tutto questo necessita di un margine di approssimazione, dovuto al fatto che alcune asserzioni non possono essere esattamente trascritte da sequenti, ma da oggetti un po' piú complicati che chiamerò sequenti nidificati, dove appaiono due segni di sequente. Poiché non è ancora stato sviluppato un calcolo dei sequenti nidificati, né garantisco che sia possibile ottenerlo, tutti i risultati ottenuti vengono riportati agli usuali sequenti, e viene quindi definito il calcolo dei sequenti **B** per la logica di base e le relative estensioni. Inoltre, si specificano le caratteristiche salienti del calcolo **B**. Una è la simmetria, che consegue dal modo di produrre le regole del calcolo con i principi di riflessione. Infatti si possono distinguere principalmente due modi di tradurre i legami metalinguistici: uno nella logica del vero (legami che si cerca di verificare) e uno nella logica del falso (legami che si cerca di confutare). Questo comporta una dualità primitiva fra i connettivi corrispondenti allo stesso legame nella logica del vero e nella logica del falso, e la conseguente simmetria del sistema di calcolo. Un'altra caratteristica delle regole di **B** è la visibilità, che permette di dimostrare il teorema di eliminazione dei tagli. Grazie e quest'ultimo, si derivano poi altre caratteristiche del calcolo **B**, che garantiscono fra l'altro il buon comportamento quantistico della logica di base. Tutto questo viene trattato nel primo capitolo.

Nel secondo capitolo della tesi si analizzano le logiche che sono caratterizzabili come estensioni simmetriche del calcolo **B**, cioè la logica quantistica paraconsistente, la ortologica e la ortologica lineare, la logica classica e la logica classica lineare (senza esponenziali). Nella parte iniziale del capitolo, si sottolinea come le logiche simmetriche siano quelle che si possono dotare di una modalità, indicata con $\perp$, che serve a tradurre la logica del falso in quella del vero e viceversa, e si comporta come una negazione. Il vantaggio offerto dalle logiche simmetriche, inoltre, è la possibilità di eliminare i connettivi di implicazione. In sistemi privi di implicazione e dotati di negazione primitiva $\perp$ è facile inserire altre modalità, che permettono di esprimere le regole strutturali, con cui la logica di base si estende, all'interno della logica di base stessa, come nel caso degli esponenziali di Girard in logica lineare. Si possono così ottenere traduzioni delle logiche piú forti nella logica di base. Tutte le modalità vengono introdotte non come connettivi, bensì come operatori definiti tramite variabili proposizionali primitive di uno specifico tipo: in questo modo le regole che le riguardano sono esclusivamente le regole strutturali.

Nel terzo capitolo vengono trattate le estensioni asimmetriche della logica di base, vale a dire quelle in cui la logica del vero è piú forte o piú debole di quella del falso. Si viene così a creare una asimmetria fra il comportamento dei connettivi per la logica del vero e del falso. Nel caso della logica lineare intuizionista questo comporta che il connettivo $\parr$ abbia le stesse limitazioni di comportamento dell'implicazione intuizionista, e quindi sia da considerare la disgiunzione moltiplicativa lineare intuizionista. Tali limitazioni di comportamento fanno sì che, in logica lineare intuizionista, non sia dimostrabile la distributività di $\parr$ rispetto a &, mentre invece vale la distributività di $\otimes$ rispetto a $\oplus$. Nel caso si aggiungano le regole strutturali di indebolimento e contrazione, però, entrambe le distributive sono valide, congiunzione e disgiunzione assumono un comportamento duale e solo l'implicazione conserva strette caratteristiche intuizionistiche.

Risulta comunque sempre piú evidente, sia nell'approccio di questa tesi, sia nell'approccio alla logica di base con l'analisi delle dimostrazioni (cf. [FS2]), che l'argomento della logica di base conduce ad uno studio unificato delle logiche. È dunque senza dubbio importante poter confrontare i risultati ottenuti tramite la logica di base con il sistema per la logica unificata proposto da J. Y. Girard in [Gi2] e con quello proposto da N. Belnap in [Be]. Il lavoro di raffronto con il sistema di Girard deve ancora venir svolto, mentre si sono già trovati riscontri con il sistema di Belnap e con altri lavori piú specifici nel campo della Display Logic (cf. [Gore]). Ad essi si accennerà anche in questa tesi.

Capitolo 1

Dal principio di riflessione alla logica di base

1.0.1 Nota introduttiva sull'interpretazione dei sequenti del calcolo per la logica di base

In questo capitolo si svilupperà un calcolo dei sequenti, che indicheremo con **B**, i cui teoremi, cioè le formule A per cui $\vdash A$ è dimostrabile, si diranno "veri" e i cui antiteoremi, cioè le formule A per cui $A \vdash$ è dimostrabile, si diranno "falsi". Questo non vuol dire che le nozioni di vero e di falso che così si originano coincidano con le nozioni di vero e falso classiche. Anzi, poiché **B** non conterrà le regole strutturali di indebolimento e contrazione, il significato di un sequente $\Gamma \vdash A$ calcolato in **B** si avvicinerà molto di piú a quello dato in logica lineare, e cioé "le risorse contenute in Γ producono A", per cui $\vdash A$ significherà "A viene prodotto con risorse nulle".

È preferibile però non impegnarsi ora nell'interpretazione specifica del significato di un sequente, ma piuttosto riferirsi sempre alle nozioni deboli di vero e falso che risultano dal calcolo dei teoremi ed antiteoremi di **B**. Questo fatto ha un doppio vantaggio:

• Non rende necessario optare ora per un'interpretazione concreta piuttosto che per un'altra, dato che ciascuna di esse potrebbe risultare in qualche modo fuorviante, per lo sviluppo di **B** in quanto logica a sè, e d'altra parte è sensato pensare che applicazioni specifiche richiedano interpretazioni diverse;

• Permette di ottenere una dualità vero/falso collocata ben al di sotto della logica classica, salvaguardando nel contempo la nozione di verità intuizionistica di "vero come dimostrabile" e sottolineando come, a tale livello di base, sia possibile affiancarla a una nozione di "falso come confutabile" di pari forza. In questo modo si vede che la risposta alla domanda

"Che cos'è la logica di base?"

data in termini di teoria della dimostrazione, è strettamente correlata alla ricerca di un'interpretazione semantica di base.

1.1 Rappresentazione di asserzioni nel linguaggio dei sequenti

Vogliamo calcolare quando le proposizioni siano vere o false servendoci del calcolo dei sequenti. Scegliamo per prima cosa di rappresentare attraverso sequenti le nozioni di "*vero*" e di "*falso*", che sono date entrambe come primitive (non dipendenti una dall'altra). Rappresenteremo l'asserzione "la proposizione A è *vera*" con

$$\vdash A$$

e l'asserzione "la proposizione A è *falsa*" con

$$A \vdash$$

Rappresenteremo inoltre anche alcune asserzioni composte con i legami metalinguistici "*comporta*" ed "*e*", del tipo

"Asserzione1 *comporta* Asserzione2"

e

"Asserzione1 *e* Asserzione2"

Le asserzioni composte con il legame "*comporta*" qui considerate saranno

A falsa comporta B falsa *A vera comporta B vera*

e verranno rappresentate rispettivamente con i sequenti

$$B \vdash A \qquad A \vdash B$$

Il legame "*comporta*" viene dunque trascritto con il segno di sequente $\vdash$. Si noti che *A falsa comporta B falsa* viene rappresentata come *B vera comporta A vera*. Lo stesso sequente rappresenta entrambe le asserzioni, poiché vogliamo che lo stesso calcolo sia in grado di produrre contemporaneamente la verità e la falsità delle proposizioni. Di fatto, il sequente $B \vdash A$ pensato come rappresentazione di "*A falsa comporta B falsa*" si può pensare allora come il sequente $A \vdash B$, che rappresenta "*A vera comporta B vera*", letto da destra a sinistra.

Le asserzioni composte con il legame "*e*" qui considerate saranno

B falsa e A falsa *A vera e B vera*

L'asserzione "*A vera e B vera*" verrà rappresentata in due modi:

$$\vdash A, B$$

oppure

$$\vdash A \quad \vdash B$$

Analogamente l'asserzione "*B falsa e A falsa*" verrà rappresentata in due modi:

$$B, A \vdash$$

oppure

$$B \vdash \quad A \vdash$$

Il legame "*e*" viene dunque rappresentato con la virgola "," in un sequente o come lo spazio bianco fra due sequenti, cioè con la giustapposizione di due formule in un sequente o la giustapposizione di due sequenti. Vedremo fra poco che cosa rende possibile la distinzione fra le due rappresentazioni di "*e*".

Per fare logica[1], passiamo ora a considerare giudizi di vero e di falso dipendenti da un parametro libero Γ o Δ, dove Γ, Δ sono liste finite di formule. Sia *vere*(Γ) un' abbreviazione per la frase "Il fatto che le proposizioni di Γ siano *vere*" e sia *false*(Δ) un' abbreviazione per la frase "Il fatto che le proposizioni di Δ siano *false*". Tratteremo giudizi del tipo:

"*vere*(Γ) *comporta* che A sia *vera*"
"*false*(Δ) *comporta* che A sia *falsa*"

che scriveremo rispettivamente

$$\Gamma \vdash A$$

e

$$A \vdash \Delta$$

In questo modo, per quanto riguarda il legame "*e*", si formano asserzioni composte del tipo

$$B, A \vdash \Delta \qquad\qquad \Gamma \vdash A, B$$

oppure del tipo

$$B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta \qquad\qquad \Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B$$

dove "$\Gamma \vdash A, B$" e "$B, A \vdash \Delta$" significano

"*vere*(Γ) *comporta* che A e B siano *vere*"
"*false*(Δ) *comporta* che A e B siano *false*"

(si afferma che A e B sono vere o false insieme);

mentre "$\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B$" e "$B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta$" significano

"*vere*(Γ) *comporta* che A sia *vera* e *vere*(Γ) *comporta* che B sia *vera*"
"*false*(Δ) *comporta* che A sia *falsa* e *false*(Δ) *comporta* che B sia *falsa*"

(è possibile affermare ciascuna delle due). La distinzione fra le due rappresentazioni di "*e*" nasce dunque da due possibili modi di considerare il legame con le ipotesi.

[1] Come si vedrà in seguito, le possibilità di ottenere un calcolo dei sequenti senza considerare alcun parametro sarebbero veramente troppo ridotte (si veda l'osservazione contenuta nel paragrafo 1.2).

Come è noto dalla logica lineare, l'identificazione dei due modi, nel calcolo dei sequenti, è regolata dalle regole strutturali di indebolimento e contrazione[2].

Per quanto riguarda il legame "*comporta*", si formano le asserzioni

$$(B \vdash A) \vdash \Delta \qquad\qquad \Gamma \vdash (A \vdash B)$$

che chiameremo anche "sequenti nidificati" e che significano:

"*vere*(Γ) *comporta* che A *vera comporti* B *vera*"

"*false*(Δ) *comporta* che B *falsa comporti* A *falsa*"

In $\Gamma \vdash (A \vdash B)$ ci sono due assunzioni: Γ e A, che però non sono, per così dire, considerate allo stesso livello, cioè affiancate[3]. In $\Gamma \vdash (A \vdash B)$, Γ si può chiamare "premessa esterna" ed A "premessa interna"; ugualmente in $(B \vdash A) \vdash \Delta$ si parla di conclusioni interne ed esterne. In seguito considereremo anche asserzioni del tipo $A \vdash (\Gamma \vdash B)$ e del tipo $(B \vdash \Delta) \vdash A$, dove il parametro compare come premessa o conclusione interna, rispettivamente.

La distinzione fra l'asserzione $\Gamma \vdash (A \vdash B)$ e l'asserzione $\Gamma, A \vdash B$ è peculiare della logica di base (e delle logiche quantistiche che si ottengono da essa), la logica lineare, intuizionistica, classica, considerano $\Gamma \vdash (A \vdash B)$ un sinonimo di $\Gamma, A \vdash B$ (infatti scritture del tipo $\Gamma \vdash (A \vdash B)$ non sono previste dal calcolo dei sequenti). Anche qui, si tratta di due possibili modi di legare le ipotesi Γ con l'asserzione A *comporta* B. L'identificazione dei due modi di considerare il legame fra antecedenti e conseguenti si può ottenere sempre con regole strutturali, cioè regole che riguardano la struttura dei sequenti, che dicono semplicemente di trasformare una struttura nell'altra:

$$\frac{(B \vdash A) \vdash \Delta}{B \vdash A, \Delta}\ imp \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash (A \vdash B)}{\Gamma, A \vdash B}\ imp$$

e le loro inverse

$$\frac{B \vdash A, \Delta}{(B \vdash A) \vdash \Delta}\ exp \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \vdash B)}\ exp$$

1.2 Il principio di riflessione

Vogliamo ora sviluppare il calcolo del vero e il calcolo del falso. Per farlo, traduciamo i legami metalinguistici fra asserzioni in connettivi, ammettendo che i segni del

[2]Qui, per motivi che vedremo meglio quando considereremo la simmetria del calcolo, abbiamo scambiato l'ordine fra A e B nelle rappresentazioni delle asserzioni sul vero e sul falso, ma non nel dare loro un significato, perché consideriamo valide le regole strutturali di scambio, quindi non distinguiamo effettivamente i due modi di scrivere l'ordine.

[3]Per l'interpretazione, si potrebbe pensare che Γ sia "l'ambiente" in cui funziona la procedura che da input A produce output B. Più specificatamente, Γ può essere l'insieme degli input di sistema di cui la routine che trasforma A in B ha bisogno o che può ammettere.

calcolo dei sequenti corrispondano a connettivi non calcolati. Otteniamo così le seguenti equivalenze fra giudizi, sia nel caso "vero" sia nel caso "falso". Chiameremo tali equivalenze "principi di riflessione".

Principi di Riflessione

$$B, A \vdash \Delta \textit{ se e solo se } B \otimes A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, B \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash A \parr B$$

$$B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta \textit{ se e solo se } B \oplus A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash A \& B$$

$$(B \vdash A) \vdash \Delta \textit{ se e solo se } B \leftarrow A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash (A \vdash B) \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

Introducendo la notazione

$$B; A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A; B$$

per $B \vdash \Delta \;\; A \vdash \Delta$ e per $\Gamma \vdash A \;\; \Gamma \vdash B$, le asserzioni date con i sequenti assumono le seguenti due forme:

$$B \cdot A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A \cdot B$$

dove il segno $\cdot$ è uno fra , ; $\vdash$. I principi di riflessione obbediscono dunque ai due seguenti schemi:

$$B \cdot A \vdash \Delta \textit{ se e solo se } B \circ_F A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A \cdot B \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash A \circ_V B$$

dove $\cdot$ è il generico segno, $\circ_V$ e $\circ_F$ i corrispondenti connettivi per il calcolo del vero e del falso.

Per ottenere il calcolo del vero e del falso facciamo diventare tali equivalenze le regole del calcolo, che trasformano in connettivi i segni corrispondenti ai legami metalinguistici. In questo senso, l'equivalenza data nei principi di riflessione viene trasformata nella barra di inferenza del calcolo dei sequenti. Piú precisamente, ciascuno dei due versi che compongono l'equivalenza si trasforma in una regola del calcolo dei sequenti, come segue:

Il verso dato da $\Gamma \vdash A \cdot B \Rightarrow \Gamma \vdash A \circ_V B$ per la logica del vero e da $B \cdot A \vdash \Delta \Rightarrow B \circ_F A \vdash \Delta$ per la logica del falso diventa immediatamente una regola del calcolo, che chiameremo "regola di formazione", il cui schema è dato da:

$$\frac{B \cdot A \vdash \Delta}{B \circ_F A \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \cdot B}{\Gamma \vdash A \circ_V B}$$

In pratica, le regole di calcolo risultanti sono ottenute semplicemente istanziando le variabili $\cdot$ e $\circ_V$ o $\circ_F$, per cui abbiamo le seguenti regole:

$$\frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A \invamp B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \qquad \frac{\Gamma \vdash (A \vdash B)}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

per la logica del vero, e

$$\frac{B, A \vdash \Delta}{B \otimes A \vdash \Delta} \qquad \frac{B; A \vdash \Delta}{B \oplus A \vdash \Delta} \qquad \frac{(B \vdash A) \vdash \Delta}{B \leftarrow A \vdash \Delta}$$

per la logica del falso. In seguito chiameremo anche connettivi "destri" i connettivi $\invamp, \&, \rightarrow$, che si formano a destra, connettivi "sinistri" i connettivi $\otimes, \oplus, \leftarrow$, che si formano a sinistra. Il connettivo $\leftarrow$ sarà chiamato "controimplicazione", e non deve essere confuso con la seconda implicazione della logica lineare non commutativa (cf. [A]), che pure incontreremo in seguito.

Negli schemi da cui abbiamo derivato le regole di formazione dei vari connettivi appare, da un lato dei sequenti, un contesto Γ o Δ che chiameremo anche "contesto passivo" della regola. Dall'altro lato del sequente appare invece una coppia di formule legate da un generico segno strutturale "$\cdot$" che viene trasformato dalla regola stessa nel connettivo "$\circ$", ottenendo un' unica formula, che appare quindi isolata. Dunque, in ogni regola di formazione, le formule secondarie e la formula principale della regola non sono affiancate da contesto (un contesto che in questo caso chiameremmo "attivo", distinguendolo da un contesto di tipo passivo). Tale caratteristica verrà detta "visibilità".

Dobbiamo ricordare qui che, derivando regole di calcolo che trasformano segni strutturali in connettivi e che soddisfano la caratteristica della visibilità, ci siamo avvicinati molto alle idee di base della display logic di N. Belnap (cf. [Be]), dove appunto troviamo il principio di display al posto della visibilità. In particolare, nel campo della display logic, per quanto riguarda la dualità fra connettivi destri e sinistri e per quanto riguarda la presenza di un segno strutturale primitivo da trasformare nell'implicazione, si veda il lavoro di R. Goré ([G]). Ricordiamo infine che l'idea della visibilità delle regole nella logica di base non è stata raggiunta per la prima volta tramite i principi di riflessione, bensì è stata ottenuta nel dimostrare il teorema di eliminazione dei tagli, come si vedrà nel paragrafo 1.4.2.

L'altro verso dei principi di riflessione corrisponde al seguente schema, che chiameremo "regola di riflessione":

$$\frac{A \circ_F B \vdash \Delta}{A \cdot B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \circ_V B}{\Gamma \vdash A \cdot B}$$

che, una volta istanziate le variabili $\cdot$ e $\circ$, non dà regole accettabili in un calcolo dei sequenti. Vediamo dunque come trovare buone regole che corrispondano allo schema della riflessione. A questo scopo, dobbiamo fare alcune ammissioni di base per il nostro calcolo dei sequenti:

- Siano validi gli assiomi $A \vdash A$
- Siano valide le seguenti regole di sostituzione:

Sostituzione semplice:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ cut$$

Sostituzioni nel caso di contesti con ",":

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta}\ cutL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta_1}\ cutR$$

Sostituzioni nel caso di sequenti nidificati, per premesse e conclusioni interne:

$$\frac{(\Gamma \vdash A) \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta_1}{(\Gamma \vdash \Delta_1) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma \vdash (A \vdash \Delta)}{\Gamma \vdash (\Gamma_1 \vdash \Delta)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad (A \vdash \Delta_1) \vdash \Delta}{(\Gamma \vdash \Delta_1) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash (\Gamma_1 \vdash A) \quad A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash (\Gamma_1 \vdash \Delta)}$$

Sostituzioni nel caso di sequenti nidificati, per premesse e conclusioni esterne:

$$\frac{(\Gamma \vdash \Delta) \vdash A \quad A \vdash \Delta_1}{(\Gamma \vdash \Delta) \vdash \Delta_1} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A \vdash (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma_1 \vdash (\Gamma \vdash \Delta)}$$

Si noti che, traducendo i sequenti nidificati $(\Gamma \vdash \Delta_1) \vdash \Delta$ e $\Gamma \vdash (\Gamma_1 \vdash \Delta)$ con i sequenti $\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta$ e $\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta$, e ammettendo la commutatività della virgola ",", le regole di sostituzione per sequenti nidificati della colonna di destra vengono a coincidere tutte con *cut* o con $cutL$, quelle della colonna di sinistra vengono a coincidere tutte con *cut* o con $cutR$.

Dimostriamo ora il seguente lemma

Lemma 1.2.1 *Per ogni connettivo destro (del calcolo del vero) sono equivalenti:*

(i) La regola di riflessione, data dallo schema $\frac{\Gamma \vdash A \circ B}{\Gamma \vdash A \cdot B}$*, che una volta istanziata assume le seguenti forme:*

$$\frac{\Gamma \vdash A \parr B}{\Gamma \vdash A, B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A; B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash (A \vdash B)}$$

(ii) Il corrispondente assioma di riflessione, dato dallo schema $A \circ B \vdash A \cdot B$*, che istanziato dà i seguenti assiomi:*

$$A \parr B \vdash A, B \qquad A \& B \vdash A; B \qquad A \to B \vdash (A \vdash B)$$

(iii) La corrispondente "regola di riflessione esplicita":

$$\frac{A \vdash \Delta_1 \quad B \vdash \Delta_2}{A \parr B \vdash \Delta_1, \Delta_2} \qquad \frac{A \vdash \Delta_1}{A \& B \vdash \Delta_1} \quad \frac{B \vdash \Delta_2}{A \& B \vdash \Delta_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \to B \vdash (\Gamma \vdash \Delta)}$$

Dimostrazione. Dimostreremo che (i) se e solo se (ii) e che (ii) se e solo se (iii). La dimostrazione dell'equivalenza di (i) ed (ii) può esser fatta sullo schema. Dallo schema di riflessione, otteniamo lo schema per l'assioma di riflessione, ponendo $\Gamma = A \circ B$ (e partendo dunque dagli assiomi $A \circ B \vdash A \circ B$). Viceversa, dallo schema per l'assioma, otteniamo lo schema per la riflessione, mediante regole di sostituzione

$$\frac{\Gamma \vdash A \circ B \quad A \circ B \vdash A \cdot B}{\Gamma \vdash A \cdot B}$$

Nella dimostrazione dell'equivalenza di (ii) ed (iii), invece, conviene riferirsi ai singoli connettivi, ma è sempre riconoscibile una uniformità nei tre casi. Per ricavare le regole di riflessione esplicite, applichiamo le regole di riflessione alle premesse delle regole, come segue

$$\frac{\dfrac{A \parr B \vdash A, B \quad A \vdash \Delta_1}{A \parr B \vdash \Delta_1, B} \qquad B \vdash \Delta_2}{A \parr B \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

per il caso di $\parr$,

$$\frac{A \& B \vdash A \quad A \vdash \Delta_1}{A \& B \vdash \Delta_1} \qquad \frac{A \& B \vdash B \quad B \vdash \Delta_2}{A \& B \vdash \Delta_2}$$

per il caso di &,

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad A \to B \vdash (A \vdash B)}{A \to B \vdash (\Gamma \vdash B)} \qquad B \vdash \Delta}{A \vdash B \vdash (\Gamma \vdash \Delta)}$$

nel caso di $\to$.

Come ultimo, ricaviamo gli assiomi di riflessione dalle regole di riflessione esplicita, partendo dalla coppia di assiomi $A \vdash A$, $B \vdash B$, nei tre casi.

$$\frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \parr B \vdash A, B} \qquad \frac{A \vdash A}{A \& B \vdash A} \quad \frac{B \vdash B}{A \& B \vdash B} \qquad \frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \to B \vdash (A \vdash B)}$$

$\square$

È facile controllare che, per dimostrare il lemma precedente, sono necessarie esattamente *cut* e le regole di sostituzione che appaiono nella colonna di destra. Con *cut* e le regole di sostituzione che appaiono nella colonna di sinistra, si può dimostrare l'analogo lemma per i connettivi sinistri:

Lemma 1.2.2 *Per ogni connettivo sinistro (del calcolo del falso) sono equivalenti:*

(i) La regola di riflessione, data dallo schema $\frac{B \circ A \vdash \Delta}{B \cdot A \vdash \Delta}$, *che una volta istanziata assume le seguenti forme:*

$$\frac{B \otimes A \vdash \Delta}{B, A \vdash \Delta} \qquad \frac{B \oplus A \vdash \Delta}{B ; A \vdash \Delta} \qquad \frac{B \leftarrow A \vdash \Delta}{(B \vdash A) \vdash \Delta}$$

(ii) Il corrispondente assioma di riflessione, dato dallo schema $A \cdot B \vdash A \circ B$, che istanziato dà i seguenti assiomi:

$$B, A \vdash B \otimes A \qquad B; A \vdash B \oplus A \qquad (B \vdash A) \vdash B \leftarrow A$$

(iii) La corrispondente "regola di riflessione esplicita":

$$\frac{\Gamma_2 \vdash B \quad \Gamma_1 \vdash A}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash B \otimes A} \qquad \frac{\Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_2 \vdash B \oplus A} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A}{\Gamma_1 \vdash B \oplus A} \qquad \frac{\Gamma \vdash B \quad A \vdash \Delta}{(\Gamma \vdash \Delta) \vdash B \leftarrow A}$$[4]

Dimostrazione. La dimostrazione è la stessa vista nel lemma precedente, salvo la simmetria. □

Con le regole di riflessione esplicita avviene uno "splitting" rispetto alle corrispondenti regole di formazione: si passa da una regola a una premessa ad una regola a due premesse, nel caso di regole di formazione a una premessa, e da una a due regole, nel caso di regole di formazione a due premesse. La caratteristica della visibilità, invece, viene mantenuta.

Da ultimo, notiamo che si puó introdurre un quarto equivalente per le regole di riflessione, che consiste nella regola del "modus ponens" nel caso dell'implicazione.

Proposizione 1.2.3 *Le seguenti "regole di composizione" sono equivalenti alle regole di riflessione:*

$$\frac{\Gamma \vdash A \parr B \quad A \vdash \Delta_1 \quad B \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \& B \quad A \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1} \quad \frac{\Gamma \vdash A \& B \quad B \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_2}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2 \vdash A \rightarrow B \quad B \vdash \Delta}{\Gamma_2 \vdash (\Gamma_1 \vdash \Delta)}$$

nel caso dei connettivi destri, e

$$\frac{\Gamma_2 \vdash B \quad \Gamma_1 \vdash A \quad B \otimes A \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma_2 \vdash B \quad B \oplus A \vdash \Delta}{\Gamma_2 \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad B \oplus A \vdash \Delta}{\Gamma_1 \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B \quad B \leftarrow A \vdash \Delta_2 \quad A \vdash \Delta_1}{(\Gamma \vdash \Delta_2) \vdash \Delta_1}$$

nel caso dei connettivi sinistri.

Dimostrazione. Si noti che le premesse delle regole di composizione sono date dalla premessa della regola di riflessione e dalle premesse della regola di riflessione esplicita. La validità delle regole di composizione, allora, si prova applicando prima

[4] Le regole sui connettivi sinistri sono sempre uguali a quelle sui connettivi destri, basta leggerle da destra a sinistra. Questo torna utile per le regole della controimplicazione!

le regole di riflessione e poi le regole di sostituzione. Viceversa, dalle regole di composizione si ottengono gli assiomi di riflessione, se nelle premesse della composizione si scrivono assiomi. □

Notiamo ora che le regole ottenute dai principi di riflessione permettono di ricavare le corrette regole di comportamento dei connettivi rispetto alla relazione di preordine sull'insieme delle formule data da $\vdash$, vale a dire: i connettivi di congiunzione e disgiunzione (i connettivi derivati da "*e*") sono monotoni rispetto a entrambi gli argomenti, i connettivi di implicazione (derivati da "*comporta*") sono antimonotoni in un argomento, monotoni nell'altro. Vale cioè il seguente lemma:

Lemma 1.2.4 *Le seguenti regole sono derivabili con le regole di formazione e riflessione esplicita:*

$$\frac{A \vdash B \quad C \vdash D}{A ⅋ C \vdash B ⅋ D} \qquad \frac{A \vdash B \quad C \vdash D}{A \& C \vdash B \& D} \qquad \frac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B \rightarrow C \vdash A \rightarrow D}$$

per i connettivi destri, e analogamente sono derivabili:

$$\frac{C \vdash D \quad A \vdash B}{C \otimes A \vdash D \otimes B} \qquad \frac{C \vdash D \quad A \vdash B}{C \oplus A \vdash D \oplus B} \qquad \frac{C \vdash D \quad A \vdash B}{C \leftarrow B \vdash D \leftarrow A}$$

per i connettivi sinistri.

Dimostrazione. Per provare tali regole si applica prima la regola di riflessione esplicita e poi la regola di formazione del connettivo considerato, come segue:

$$\frac{\dfrac{A \vdash B \quad C \vdash D}{A ⅋ C \vdash B, D}}{A ⅋ C \vdash B ⅋ D} \qquad \frac{\dfrac{A \vdash B}{A \& C \vdash B} \quad \dfrac{C \vdash D}{A \& C \vdash D}}{A \& C \vdash B \& D} \qquad \frac{\dfrac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B \rightarrow C \vdash (A \vdash D)}}{B \rightarrow C \vdash A \rightarrow D}$$

per i connettivi destri, e analogamente per i connettivi sinistri. □

Come corollario, otteniamo il seguente

Corollario 1.2.5 *Gli assiomi $A \vdash A$ sono derivabili a partire dagli assiomi $p \vdash p$ dati su variabili proposizionali primitive p.*

Dimostrazione. Se $A = B \circ C$, si applichi il lemma precedente, ottenendo le prove

$$\frac{B \vdash B \quad C \vdash C}{B \circ C \vdash B \circ C}$$

□

Osservazione I lemmi 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4 e il corollario 1.2.5 non sarebbero derivabili in una logica che non possa considerare i contesti passivi Γ, Δ. Vale a dire, scrivendo i principi di riflessione così:

$$B \cdot A \vdash \ \textit{se e solo se } B \circ_F A \vdash \qquad \vdash A \cdot B \textit{ se e solo se } \vdash A \circ_V B$$

non avremmo potuto dimostrare le equivalenze contenute nei lemmi 1.2.1, 1.2.2, perché gli assiomi di riflessione non sarebbero stati esprimibili, e per un motivo analogo non avremmo potuto dimostrare il lemma 1.2.4. Un calcolo che non sappia derivare neppure il comportamento dei propri connettivi rispetto all'ordine sarebbe veramente molto povero, per questo è meglio poter considerare i giudizi $\Gamma \vdash A \cdot B$ e $B \cdot A \vdash \Delta$, contenenti il parametro Γ o Δ.

Infine, notiamo che mediante principi di riflessione si determinano anche regole sulle costanti logiche 0-arie $\bot$, $\top$, 1, 0 (le costanti della logica lineare nella notazione di Girard) . Infatti, ponendo

$$\vdash \Delta \textit{ se e solo se } 1 \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \ \textit{se e solo se } \Gamma \vdash \bot$$

vale a dire, richiedendo che le costanti $\bot$ e 1 interpretino l'insieme vuoto a destra e a sinistra, rispettivamente, si ottengono le seguenti regole di formazione:

$$\frac{\vdash \Delta}{1 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \bot}$$

e le seguenti regole di riflessione:

$$\frac{1 \vdash \Delta}{\vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash}$$

che a loro volta sono equivalenti agli assiomi di riflessione

$$\vdash 1 \qquad \bot \vdash$$

come già visto nella dimostrazione dei lemmi 1.2.1 e 1.2.2 per il caso delle costanti logiche binarie. Non è possibile, invece, ottenere regole di riflessione esplicite per 1 e $\bot$, in quanto queste richiederebbero di "spezzare" 1 e $\bot$, che non hanno componenti. Quindi $\vdash 1$ e $\bot \vdash$ saranno le regole di riflessione per 1 e $\bot$.

Introduciamo infine la motivazione per le regole delle costanti additive 0 e $\top$, in termini di principi di riflessione. Esse provengono dalle seguenti equivalenze:

$$\Gamma \vdash B \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash B \textit{ e } \Gamma \vdash \top$$

$$A \vdash \Delta \textit{ se e solo se } A \vdash \Delta \textit{ e } 0 \vdash \Delta$$

che dicono che $\Gamma \vdash \top$ e $0 \vdash \Delta$ sono le asserzioni banali per un legame *e* nel caso additivo. Da tali equivalenze otteniamo le seguenti regole di formazione:

$$\Gamma \vdash \top$$

$$0 \vdash \Delta$$

Le regole di riflessione, nel caso di $\top$ e 0, non esistono, poiché corrisponderebbero all' altro verso delle equivalenze, che in questo caso è banale.

1.3 Dal principio di riflessione al calcolo B

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come dai principi di riflessione si ricavino regole per tutte le costanti logiche previste dalla logica lineare. Vogliamo ora studiare un calcolo che soddisfi esattamente tali regole. Se però ci basassimo soltanto su tale calcolo, saremmo costretti a inventare un calcolo per i sequenti nidificati, che, come abbiamo visto, compaiono nelle regole per le implicazioni, e la cui forma generica è

$$(\Gamma \vdash \Delta_1) \vdash \Delta_2 \qquad \Gamma_1 \vdash (\Gamma_2 \vdash \Delta)$$

dove però Γ_1 o Γ_2 e Δ_1 o Δ_2 consistono di una sola formula. Studiare però un intero calcolo per sequenti nidificati è un problema aperto di non facile soluzione. Tanto per dare l'idea dei problemi posti da un tale calcolo, si tratterebbe prima di tutto di accertare la possibilità di applicazione o meno a sequenti nidificati delle regole per connettivi diversi dall'implicazione, di scoprire poi se le regole di sostituzione che abbiamo dato sono quelle giuste, di ottenere un teorema di conservatività del calcolo per sequenti nidificati sopra un calcolo tradizionale, di capire bene le regole *imp* e *exp* cui abbiamo accennato nell'introdurre i sequenti nidificati, e molto altro ancora.

Rinunciamo dunque per ora al calcolo dei sequenti nidificati e optiamo per un calcolo tradizionale, che sia sempre basato sui principi di riflessione che abbiamo analizzato. Chiameremo **B** tale calcolo. Abbiamo già le regole per le costanti e per i connettivi $⅋$, $\otimes$, $\&$, $\oplus$, scritte con sequenti tradizionali. Ci resta il problema di ottenere delle buone regole per le implicazioni $\rightarrow$ e $\leftarrow$, che si esprimano in **B**. In quanto segue considereremo solo il caso di $\rightarrow$, fermo restando il fatto che il caso di $\leftarrow$ si può discutere in modo analogo.

Volendo regole per l'implicazione scritte con i sequenti tradizionali e nel contempo basate su un principio di riflessione, potremmo scegliere di studiare il principio di riflessione per $\rightarrow$ considerando l'asserzione $\Gamma \vdash (A \vdash B)$ equivalente a $\Gamma, A \vdash B$. Ciò che troveremmo è l'equivalenza

$$\Gamma, A \vdash B \text{ \textit{se e solo se} } \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

che dà esattamente le usuali regole per l'implicazione. Infatti, è immediato verificare (cf. [BS] e [BFS]) che a tali equivalenze corrispondono le seguenti regole di formazione e di riflessione esplicita

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$$

in quanto possiamo enunciare il seguente lemma degli equivalenti per la regola di riflessione

Lemma 1.3.1 *Dati gli assiomi $A \vdash A$ e le regole di sostituzione*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta}\, cutL \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta_1}\, cutR$$

sono equivalenti:

(i) Regola di riflessione

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, A \vdash B}$$

(ii) Assioma di riflessione

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

(iii) Regola di riflessione esplicita

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$$

Scegliendo questo metodo, dunque, oltre a perdere la distinzione fra $\Gamma \vdash (A \vdash B)$ e $\Gamma, A \vdash B$, le logiche di tipo quantistico (dove non ci può essere la solita implicazione) resterebbero fuori della nostra portata.

Abbiamo però un'altra possibilità, che ritroverà la soluzione proposta fin dall'inizio (cf. [BS]) per le regole di implicazione nella logica di base: "eliminare" il parametro Γ dai sequenti $\Gamma \vdash (A \vdash B)$ e porre semplicemente

$$A \vdash B \textit{ se e solo se } \vdash A \rightarrow B$$

Questo lascia aperta la porta allo studio di un calcolo dei sequenti nidificati e alle logiche quantistiche, come vedremo ora.

Per studiare tale possibilità, notiamo che nella scrittura $\Gamma_1 \vdash (\Gamma_2 \vdash \Delta)$ si può invertire il modo che abbiamo usato finora per considerare le due assunzioni Γ_1 e Γ_2, cioè si può considerare la premessa interna Γ_2 come parametro e calcolare con un connettivo di implicazione il segno di sequente esterno e non quello interno. Si vengono cioè a considerare i seguenti principi di riflessione

$$\Gamma \vdash (A \vdash B) \text{ se e solo se } \Gamma \vdash A \rightarrow_i B$$

$$A \vdash (\Gamma \vdash B) \text{ se e solo se } \Gamma \vdash A \rightarrow_e B$$

dove $\rightarrow_i$, che abbiamo prima denotato solo con $\rightarrow$, è il connettivo che calcola il segno di sequente interno, mentre $\rightarrow_e$ è il connettivo che calcola il segno di sequente esterno. Ad esso corrisponde la seguente regola di formazione

$$\frac{A \vdash (\Gamma \vdash B)}{\Gamma \vdash A \rightarrow_e B}$$

e i seguenti equivalenti per la regola di riflessione

(i) Regola di riflessione

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow_e B}{A \vdash (\Gamma \vdash B)}$$

(ii) Assioma di riflessione

$$A \vdash (A \rightarrow_e B \vdash B)$$

(iii) Regola di riflessione esplicita

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash (A \rightarrow_e B \vdash \Delta)}$$

dove le equivalenze si provano al solito modo, con le stesse regole di sostituzione usate nel caso di $\rightarrow_i$. Le due implicazioni $\rightarrow_i$ e $\rightarrow_e$, una volta identificate le scritture $\Gamma_1 \vdash (\Gamma_2 \vdash \Delta)$ e $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta$, se non si assume la commutatività di ",", concidono con le due implicazioni della logica lineare non commutativa. Qui non analizzeremo il problema della non commutatività, ci basta sottolineare come ci siano due modi di considerare le premesse Γ_1, Γ_2 in $\Gamma_1 \vdash (\Gamma_2 \vdash \Delta)$ (tali modi saranno regolati da regole strutturali di scambio). In particolare, ci sono due modi di avere premesse banali con sequenti nidificati, che corrispondono ai due seguenti principi di riflessione:

$$A \vdash \Delta \text{ se e solo se } 1 \vdash (A \vdash \Delta)$$

introducendo 1 come premessa esterna, e

$$A \vdash \Delta \text{ se e solo se } A \vdash (1 \vdash \Delta)$$

introducendo 1 come premessa interna. Tutto questo dice quali sono i due modi naturali in cui un sequente tradizionale può esser considerato come un sequente nidificato. Dunque l'equivalenza che cercavamo, cioè

$$A \vdash B \textit{ se e solo se } \vdash A \rightarrow B$$

si ottiene, ricordando che $\vdash A \rightarrow B$ se e solo se $1 \vdash A \rightarrow B$, sia nel caso di $\rightarrow_i$

$$1 \vdash (A \vdash B) \textit{ se e solo se } 1 \vdash A \rightarrow_i B$$

sia nel caso di $\rightarrow_e$

$$A \vdash (1 \vdash B) \textit{ se e solo se } 1 \vdash A \rightarrow_e B$$

Le regole di formazione corrispondenti sono rispettivamente

$$\frac{1 \vdash (A \vdash B)}{1 \vdash A \rightarrow_i B} \qquad \frac{A \vdash (1 \vdash B)}{1 \vdash A \rightarrow_e B}$$

e le regole di riflessione esplicite sono

$$\frac{1 \vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \rightarrow_i B \vdash (1 \vdash \Delta)} \qquad \frac{1 \vdash A \quad B \vdash \Delta}{1 \vdash (A \rightarrow_e B \vdash \Delta)}$$

Tali regole, scritte con sequenti tradizionali (e ricordando che $1 \vdash C$ se e solo se $\vdash C$, per ogni C) diventano, in entrambi i casi

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A {\rightarrow} B} \rightarrow R$$

$$\frac{1 \vdash A \quad B \vdash \Delta}{A {\rightarrow} B \vdash \Delta} \rightarrow L$$

dove scompare dunque la distinzione fra $\rightarrow_i$ ed $\rightarrow_e$, che avrebbero le stesse regole. Inoltre, aggiungeremo alle regole che definiranno il calcolo **B** anche la seguente regola

$$\frac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B {\rightarrow} C \vdash A {\rightarrow} D} \rightarrow U$$

Infatti, come visto nell'osservazione del paragrafo 1.2, il lemma 1.2.4, mancando il contesto Γ, non sarebbe dimostrabile, e quindi la regola $\rightarrow U$, che è derivabile con sequenti nidificati, non sarebbe derivabile in **B**. Allora, per non rinunciare in partenza alla conservatività di un futuro calcolo dei sequenti nidificati rispetto a **B**, e comunque perchè ci sembra una regola da rendere valida, la aggiungiamo al calcolo. Le regole $\rightarrow R$, $\rightarrow L$ e $\rightarrow U$ coincidono con quelle del primo sistema per la logica di base che abbiamo studiato (cf. [BS]).

Con considerazioni analoghe, si giustificano le seguenti regole per $\leftarrow$

$$\frac{B \vdash A}{B {\leftarrow} A \vdash} \leftarrow L$$

$$\frac{\Gamma \vdash B \quad A \vdash}{\Gamma \vdash B {\leftarrow} A} \leftarrow R$$

$$\frac{C \vdash D \quad A \vdash B}{C {\leftarrow} B \vdash D {\leftarrow} A} \leftarrow U$$

Le costanti logiche e le loro regole di inferenza in logica di base sono ora completamente giustificate. Possiamo ora definire formalmente la logica di base come la logica proposizionale con connettivi $\parr$, &, $\rightarrow$, $\otimes$, $\oplus$, $\leftarrow$, e costanti $\bot$, $\top$, 1, 0, e con le regole di inferenza riassunte nella tavola seguente. Considereremo inoltre anche le regole strutturali di scambio, come abbiamo detto dall'inizio. Alla tavola delle regole aggiungeremo anche gli assiomi e le regole di taglio che abbiamo dato per valide per dimostrare i lemmi di riflessione e quindi per ottenere le regole sui connettivi. Nel prossimo paragrafo vedremo che in effetti le regole di taglio sono valide nel calcolo che comprenda solo assiomi e regole sui connettivi, grazie ad una procedura di eliminazione del taglio.

Come al solito A, B, C, D sono formule e $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta, \Delta_1, \Delta_2$ sono liste finite di formule.

Tabella 1.1: Calcolo di base $\mathbf{B}$

Assiomi

$$A \vdash A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ exchL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ exchR$$

Regole operazionali

$$\frac{B, A \vdash \Delta}{B \otimes A \vdash \Delta}\ \otimes L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A \parr B}\ \parr R$$

$$\frac{A \vdash \Delta_1 \quad B \vdash \Delta_2}{A \parr B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \parr L \qquad \frac{\Gamma_2 \vdash B \quad \Gamma_1 \vdash A}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash B \otimes A}\ \otimes R$$

$$\frac{\vdash \Delta}{1 \vdash \Delta}\ 1L \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \bot}\ \bot R$$

$$\bot \vdash \ \ \bot L \qquad \vdash 1 \ \ 1R$$

$$\frac{B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta}{B \oplus A \vdash \Delta}\ \oplus L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ \& R$$

$$\frac{A \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta} \quad \frac{B \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta}\ \& L \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B \oplus A} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \oplus A}\ \oplus R$$

$$0 \vdash \Delta \ \ 0L \qquad \Gamma \vdash \top \ \ \top R$$

$$\frac{B \vdash A}{B \leftarrow A \vdash}\ \leftarrow L \qquad \frac{A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B}\ \rightarrow R$$

$$\frac{\vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow L \qquad \frac{\Gamma \vdash B \quad A \vdash}{\Gamma \vdash B \leftarrow A}\ \leftarrow R$$

$$\frac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B \rightarrow C \vdash A \rightarrow D}\ \rightarrow U \qquad \frac{C \vdash D \quad A \vdash B}{C \leftarrow B \vdash D \leftarrow A}\ \leftarrow U$$

Regole di taglio

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ cutL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A \quad A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ cutR$$

1.4 Alcune caratteristiche del calcolo B

1.4.1 Simmetria

Dopo tutti i discorsi fatti, si puó dire una cosa sola: poteva forse riuscire un calcolo non simmetrico? Nella tabella di **B**, le regole possono essere lette in coppie simmetriche: infatti gli assiomi $A \vdash A$ si considerano simmetrici a se stessi, e ogni regola della colonna di destra è esattamente la corrispondente regola della colonna di sinistra letta da destra a sinistra, scambiando Γ con Δ e ammettendo le seguenti coppie di corrispondenti nella relazione di simmetria: $(A \otimes B, B \parr A)$, $(1, \bot)$, $(A \oplus B, B \& A)$, $(0, \top)$, $(B \leftarrow A, A \rightarrow B)$. Si ottiene così una simmetria assiale rispetto all'asse verticale della pagina, e ha dunque senso dire che una regola è "simmetrica" di un'altra, e quindi che una prova è "simmetrica" di un'altra. La corrispondenza fra le regole ritrova la corrispondenza naturale fra connettivi destri e sinistri data dai principi di riflessione. Data tale corrispondenza, si può dimostrare formalmente il seguente teorema:

Teorema 1.4.1 *Il sequente $C_1, \ldots, C_n \vdash D_1, \ldots, D_m$ è dimostrabile in* **B** *se e solo se lo è anche il sequente $D_1^s, \ldots, D_m^s \vdash C_1^s, \ldots, C_n^s$, dove $(-)^s$ è definita induttivamente sulle formule ponendo:*

$$p^s \equiv p$$

per ogni variabile proposizionale p, e facendo corrispondere ad ogni costante sinistra (destra) la costante destra (sinistra) che calcola lo stesso segno nei principi di riflessione.

Dimostrazione. Data una prova di $C_1, \ldots, C_n \vdash D_1, \ldots, D_m$, si dimostra $D_1^s, \ldots, D_m^s \vdash C_1^s, \ldots, C_n^s$, tramite la prova simmetrica, che si ottiene dagli stessi assiomi scambiando ogni regola con la sua simmetrica. □

1.4.2 Visibilità e teorema di eliminazione dei tagli

Ricordiamo prima di tutto la definizione di "visibilità", "contesto attivo" e "contesto passivo", che è stata già fornita nel paragrafo 1.2, ma che è anche direttamente legata al teorema di eliminazione dei tagli, e che di fatto è stata concepita per la prima volta in tale ambito (vedi Appendice A).

"Una regola gode della visibilità quando accanto alle formule secondarie e alla formula principale della regola, non appare contesto attivo,"

dove il contesto attivo è appunto quello che compare accanto a una formula principale o secondaria, mentre gli altri contesti vengono detti passivi.

Diremo inoltre che una qualsiasi regola è completa (o, piú limitatamente, completa a sinistra/a destra) quando contiene tutti i contesti (piú limitatamente: contesti a sinistra/destra), attivi o passivi. Useremo i prefissi *fl*, *fr*, *f* [full], per denotare le forme complete a sinistra, complete a destra e complete, rispettivamente, di una data regola di **B**.

In **B**, le regole per i connettivi godono della proprietà di visibilità. Ciò era già stato visto con i principi di riflessione; notiamo qui che, adattando le regole per $\rightarrow$ e $\leftarrow$ alla forma in cui compaiono in **B**, tale caratteristica non va perduta.

L'idea di visibilità è stata concepita tentando di dimostrare il teorema di eliminazione del taglio per la logica di base. L'esempio concreto (cf. [BFS]) è stato questo: supponiamo di avere un sistema di calcolo dei sequenti in cui la regola che introduce $\oplus$ a sinistra sia la seguente:

$$\frac{A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta}{A \oplus B \vdash \Delta}$$

mentre invece la regola che introduce & a sinistra sia la seguente:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}$$

Consideriamo ora la derivazione:

$$\frac{\dfrac{A \vdash C\&D \quad B \vdash C\&D}{A \oplus B \vdash C\&D} \quad \dfrac{\Gamma, C \vdash \Delta}{\Gamma, C\&D \vdash \Delta}}{\Gamma, A \oplus B \vdash C}\ cutL$$

Dato che la formula da tagliare è principale nella premessa destra, la procedura di Gentzen direbbe di alzare il taglio lungo il ramo sinistro, per ridurre il rango sinistro, come segue:

$$\frac{\dfrac{A \vdash C\&D \quad \Gamma, C\&D \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad \dfrac{B \vdash C\&D \quad \Gamma, C\&D \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{-}\ ?$$

Ma ora, se Γ non è vuoto, non è possibile applicare la regola che introduce $\oplus$. Dunque, cercando un'eliminazione del taglio alla Gentzen, non è conveniente avere un sistema di regole in cui coesistono regole con visibilità e regole complete. Un altro fatto di cui tener conto, se si vuol fare della quantum logic con il calcolo dei sequenti, è il fatto che la regola della disgiunzione a sinistra va necessariamente limitata alla forma vista sopra (cf. [CG], [N], [BS]), altrimenti (come vedremo nel prossimo paragrafo) sarebbe dimostrabile la proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione, che non vale negli ortoreticoli (cf. anche [Go]). Dunque, volendo comprendere, con la logica di base, anche logiche quantistiche, le regole del sistema non possono essere tutte complete: allora è meglio poterle scegliere tutte con la proprietà di visibilità, come è stato fatto.

Si può enunciare a questo punto il seguente teorema (la dimostrazione, data in [BFS], è riportata in appendice A).

Teorema 1.4.2 *Ogni derivazione in* **B** *di un sequente* $\Gamma \vdash \Delta$ *si può trasformare in una derivazione in* **B** *dello stesso sequente, in cui le regole* $cutL$ *e* $cutR$ *non appaiono.*

Si può osservare ora che, poiché le regole sui connettivi godono della visibilità e le regole di taglio non sono necessarie, ogni sequente derivabile in **B** avrà una delle due seguenti forme:

$$A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A$$

Dunque, il nostro calcolo può derivare esattamente il genere di asserzioni, con un parametro, che avevamo considerato inizialmente.

1.4.3 Altre caratteristiche del calcolo

Vogliamo discutere qui alcune importanti conseguenze del teorema di eliminazione dei tagli, e trovare forme equivalenti alle regole di **B**.

Proposizione 1.4.3 *In* **B** *non valgono la regola associativa per* $⅋$ *e* $\otimes$ *e la regola distributiva di* $⅋$ *rispetto a* $\&$ *e di* $\otimes$ *rispetto a* $\oplus$. *Infatti i sequenti*

$$C \otimes (A \otimes B) \vdash (C \otimes A) \otimes B \qquad (A ⅋ B) ⅋ D \vdash A ⅋ (B ⅋ D)$$

e

$$C \otimes (A \oplus B) \vdash (C \otimes A) \oplus (C \otimes B) \qquad (A ⅋ D) \& (B ⅋ D) \vdash (A \& B) ⅋ D$$

non sono derivabili. Per questo, le regole di formazione per $⅋$, $\otimes$, $\&$, $\oplus$ *non sono equivalenti alla loro versione completa, vale a dire non valgono in* **B** *le seguenti regole, che corrispondono alle regole della logica lineare per gli stessi connettivi:*

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta}\, f \otimes L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A ⅋ B, \Delta}\, f⅋R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}\, f \oplus L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\, f\&R$$

Dimostrazione. Se le regole $f \otimes L$, $f⅋R$, $f \oplus L$, $f\&R$ fossero valide in **B**, anche l'associativa e la distributiva sarebbero derivabili, come mostriamo qui per il caso del connettivi sinistri:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{C \vdash C \quad A \vdash A}{C, A \vdash C \otimes A} \quad B \vdash B}{C, A, B \vdash (C \otimes A) \otimes B}}{C, (A \otimes B) \vdash (C \otimes A) \otimes B}\, f \otimes L}{C \otimes (A \otimes B) \vdash (C \otimes A) \otimes B}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{C \vdash C \quad A \vdash A}{C, A \vdash C \otimes A}}{C, A \vdash (C \otimes A) \oplus (C \otimes B)} \quad \cfrac{\cfrac{C \vdash C \quad B \vdash B}{C, B \vdash C \otimes B}}{C, B \vdash (C \otimes A) \oplus (C \otimes B)}}{\cfrac{C, A \oplus B \vdash (C \otimes A) \oplus (C \otimes B)}{C \otimes (A \oplus B) \vdash (C \otimes A) \oplus (C \otimes B)}}\ f \oplus L$$

È evidentemente impossibile invece trovare una prova senza tagli degli stessi sequenti con le regole del sistema **B**, quindi associativa e distributiva non sono derivabili in **B**, e quindi le regole complete non sono valide. □

Sono invece derivabili in **B** le altre disuguaglianze per la proprietà distributiva, che sono date dai sequenti:

$$(C \otimes A) \oplus (C \otimes B) \vdash C \otimes (A \oplus B) \qquad (A \& B) ⅋ D \vdash (A ⅋ D) \& (B ⅋ D)$$

Ecco la derivazione, nel caso di $\otimes$ e $\oplus$:

$$\cfrac{\cfrac{C \vdash C \quad \cfrac{A \vdash A}{A \vdash A \oplus B}\oplus R}{(C \otimes A) \vdash C \otimes (A \oplus B)}\otimes R \quad \cfrac{C \vdash C \quad \cfrac{B \vdash B}{B \vdash A \oplus B}\oplus R}{(C \otimes B) \vdash C \otimes (A \oplus B)}\otimes R}{(C \otimes A) \oplus (C \otimes B) \vdash C \otimes (A \oplus B)}\oplus L$$

Discuteremo più a lungo nel terzo capitolo del fatto che le regole di formazione dei connettivi sono intrinsecamente limitate, vale a dire non sono equivalenti a una loro versione che contenga più contesti. Per quanto riguarda le regole di riflessione, invece, la formulazione visibile non è la sola ammissibile in **B**. Infatti, le regole di riflessione dei connettivi additivi e delle implicazioni si possono estendere come segue:

Proposizione 1.4.4 *Le seguenti regole sono equivalenti a quelle di* **B***:*

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ f\&L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}\ f \oplus R$$

$$\frac{\Gamma \vdash B, \Delta \quad A \vdash}{\Gamma \vdash B \leftarrow A, \Delta} \qquad \frac{\vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

Dimostrazione. Abbiamo la seguente derivazione per $f\&L$:

$$\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{A \& B \vdash A} \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ cutL$$

e la sua simmetrica, che usa $cutR$, per $\oplus R$. Per $\to$ deriviamo così la regola estesa data sopra:

$$\cfrac{\cfrac{\vdash A \quad B \vdash B}{A \to B \vdash B} \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ cutL$$

e simmetricamente è derivabile la regola per $\leftarrow R$. $\square$

Ulteriori equivalenze per le regole di riflessione verranno discusse in seguito, per alcune estensioni di **B**. Vogliamo qui osservare che non è derivabile in **B** la seguente regola:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$$

Infatti in **B** è valido il lemma 1.3.1, e quindi la regola data sopra non vale perché il suo equivalente $A, A \rightarrow B \vdash B$ non ammette una derivazione senza tagli.

Si ricorda infine che è la formulazione visibile delle regole quella che permette di ottenere la procedura per l'eliminazione dei tagli per la logica di base, come abbiamo precisato nel paragrafo precedente.

Per quanto riguarda il comportamento delle costanti in **B**, è facile osservare il seguente risultato:

Proposizione 1.4.5 *Per ogni formula A, sono derivabili in* **B***:*

$$A \vdash A \otimes 1 \qquad \bot \parr A \vdash A$$

$$A \oplus 0 = A \qquad A \& \top = A$$

Il sequente $A \otimes 1 \vdash A$ e il suo simmetrico $A \vdash A \parr \bot$ non sono derivabili, e quindi anche le regole di formazione per 1 e $\bot$ non si possono estendere con contesto attivo.

Dimostrazione. La derivazione

$$\frac{A \vdash A \quad \vdash 1}{A \vdash A \otimes 1}$$

e per simmetria si ottiene anche $\bot \parr A \vdash A$. Le derivazioni

$$\frac{A \vdash A \quad 0 \vdash A}{A \oplus 0 \vdash A} \qquad \frac{A \vdash A}{A \vdash A \oplus 0}$$

dicono che $A \oplus 0 = A$, le derivazioni simmetriche ricavano $A \& \top = A$.

Infine, se il sequente $A \otimes 1 \vdash A$ fosse derivabile, ci sarebbe una prova senza tagli, quindi anche $A, 1 \vdash A$ sarebbe derivabile, ma non lo è, dato che la regola $1L$ del sistema **B** non ammette contesto a sinistra (il contesto attivo) e nessuna altra regola di **B** è applicabile, a parte lo scambio, che ripropone il problema. Dunque, anche la regola

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}$$

non è derivabile per mezzo di altre regole di **B**.

Analogamente si procede nel caso di $\parr$. $\square$

1.4.4 Negazioni in B

Nel linguaggio di **B** si possono definire due negazioni, $\neg$ e $\sim$, una nel linguaggio della logica del vero e l'altra nel linguaggio della logica del falso:

$$\sim A \equiv 1 \leftarrow A \qquad \neg A \equiv A \rightarrow \bot$$

Esse soddisfano le seguenti regole

$$\frac{1 \vdash A}{\sim A \vdash} \sim L \qquad \frac{A \vdash \bot}{\vdash \neg A} \neg R$$

che sono derivabili per mezzo di $\leftarrow L$ e $\rightarrow R$, rispettivamente,

$$\frac{\vdash A}{\neg A \vdash \bot} \neg L \qquad \frac{A \vdash}{1 \vdash \sim A} \sim R$$

che sono derivabili per mezzo di $\rightarrow L$ e $\leftarrow R$, rispettivamente. Infine $\neg$ e $\sim$ soddisfano le regole di antimonotonia rispetto al segno di sequente, cioè

$$\frac{A \vdash B}{\sim B \vdash \sim A} \qquad \frac{A \vdash B}{\neg B \vdash \neg A}$$

derivabili con $\leftarrow U$ e $\rightarrow U$ rispettivamente.

Possiamo vedere infine che entrambe le negazioni così definite sono paraconsistenti, vale a dire, non soddisfano né la legge di non-contraddizione, né quella del terzo escluso. Infatti, il sequente $\sim A, A \vdash$ come pure il suo simmetrico $\vdash A, \neg A$ non ammettono prova senza tagli. Lo stesso si può dire del sequente $\vdash A, \sim A$ e del suo simmetrico $A, \neg A \vdash$.

Dunque le due negazioni $\sim$ e $\neg$ sottostanno sia a un'idea intuizionistica sia a un'idea classica di negazione, in quanto non soddisfano il terzo escluso e nel contempo non privilegiano la non contraddizione.

1.5 Estensioni della logica di base

1.5.1 Nota introduttiva

La motivazione allo studio della logica di base è stata quella di trovare una logica che fosse contemporaneamente più debole di varie logiche estensionali già note. È naturale dunque chiedersi come si possano ottenere le logiche piú forti a partire da **B**. Si scopre allora che le modifiche da chiedere a **B** sono molto semplici, e, per di piú, non è necessario aggiungere o togliere connettivi, regole sui connettivi o condizioni sui connettivi per ritrovare le altre logiche: basta intervenire sulla "struttura", ovvero, sui modi di intendere i legami delle asserzioni con le assunzioni, modi che sono spiegabili con regole strutturali, come accennavamo nel primo paragrafo. Questo rafforza l'idea che la logica di base sia da intendersi come "la logica pura dei connettivi", e che lo studio delle sue estensioni coincida in effetti con lo studio dell'equazione

$$\text{Logica=regole sui connettivi + regole strutturali}$$

Abbiamo a disposizione le regole strutturali di indebolimento e contrazione, che identificano i due modi di interpretare il legame "*e*", come visto nel primo paragrafo. Con esse si ottengono le estensioni non lineari della logica di base. Se invece vogliamo le estensioni in cui ci sia un'implicazione "vera", abbiamo bisogno delle regole strutturali per il legame "*comporta*". Quelle che abbiamo a disposizione sono le regole:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \vdash B)}\; imp$$

e

$$\frac{\Gamma \vdash (A \vdash B)}{\Gamma, A \vdash B}\; exp$$

date nel primo paragrafo, che trasformerebbero le regole di base sull'implicazione

$$\frac{\Gamma \vdash (A \vdash B)}{\Gamma \vdash (A \to B)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \to B \vdash (\Gamma \vdash \Delta)}$$

nelle regole intuizionistiche usuali[5]

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}$$

Cioè, le due assunzioni Γ ed A, che erano a livelli diversi, passerebbero allo stesso livello. Ma il calcolo per la logica di base **B** non gestisce i sequenti $\Gamma \vdash (A \vdash B)$: allora la cosa piú sensata è dire che le regole di **B**

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \to B} \qquad \frac{\vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \to B \vdash \Delta}$$

si trasformano comunque nelle stesse regole intuizionistiche

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}$$

cioè, si passa da regole per $\to$ senza contesto a regole con contesto a sinistra. Fatto questo, conviene aggiungere contesto a sinistra a tutte le regole che non lo hanno già: infatti, come abbiamo visto prima, per eliminare il taglio non conviene mischiare

[5]Nella regola intuizionistica per $\to L$ c'è anche un contesto Γ' accanto a B, ma questo si può facilmente recuperare già con la regola $\to L$ di **B**, come visto in 1.4.4; vedi anche [Be], dove è provata l'equivalenza nel caso intuizionistico.

regole con visibilità a sinistra e regole con contesto a sinistra. Come ulteriore osservazione, c'è da aggiungere che, se ci si limita ad avere una sola formula a destra, ogni regola con visibilità a sinistra è equivalente alla sua forma completa a sinistra, quando le regole per l'implicazione hanno contesto a sinistra. Ad esempio, nel caso in cui a destra ci sia la formula D, se $\Gamma = C_1, \ldots, C_n$, la regola completa $f \oplus L$ si deriva così dalla regola $\oplus L$ di **B**:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, A \vdash D \\ \vdots \\ A \vdash C_1 \to \ldots \to (C_n \to D)\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma, B \vdash D \\ \vdots \\ B \vdash C_1 \to \ldots \to (C_n \to D)\end{array}}{\begin{array}{c}A \oplus B \vdash C_1 \to \ldots \to (C_n \to D)\end{array}} \oplus L$$
$$\vdots$$
$$\Gamma, A \oplus B \vdash D$$

Allora la regola strutturale che permette di ottenere le estensioni di tipo intuizionista della logica di base è semplicemente

"liberalizzare il contesto a sinistra"

Per simmetria, si considererà anche la regola

"liberalizzare il contesto a destra"

1.5.2 Estensioni del calcolo B

Vediamo ora in dettaglio gli effetti dell'aggiunta di regole strutturali alle regole del calcolo. Cominciamo dai casi "liberalizzare il contesto a sinistra" e "liberalizzare il contesto a destra". Per regole moltiplicative e additive, una delle due liberalizzazioni non ha effetto, dato che tali regole ammettono già un contesto: quello passivo. Così, ad esempio, considerando $\parr R$ abbiamo:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \dfrac{\Gamma \vdash B, A}{\Gamma \vdash B \parr A}\,\parr R \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
fl\parr\mathrm{R} = \parr\mathrm{R} \arrow[dr] & & \dfrac{\Gamma \vdash B, A, \Delta}{\Gamma \vdash B \parr A, \Delta}\, fr\parr R \arrow[dl] \\
 & f\parr\mathrm{R} = fr\parr\mathrm{R} &
\end{tikzcd}$$

In generale, la forma completa a sinistra di una regola a destra è invariata rispetto alla forma originaria, in quanto il contesto a sinistra è già presente. Dunque la forma completa in tali casi è una sola, denotata dal prefisso f. In modo simmetrico si ragiona per regole a destra. Riassumiamo qui la forma completa delle regole per i connettivi moltiplicativi e additivi:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta}\, f \otimes L \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B, A, \Delta}{\Gamma \vdash B \parr A, \Delta}\, f \parr R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \parr B \vdash \Delta, \Delta'}\, f \parr L \qquad\qquad \frac{\Gamma' \vdash B, \Delta' \quad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash B \otimes A, \Delta, \Delta'}\, f \otimes R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}\, f1L \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \bot, \Delta}\, f \bot R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}\, f \oplus L \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta \quad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash B \& A, \Delta}\, f\&R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\, f\&L \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}\, f \oplus R$$

$$\Gamma, 0 \vdash \Delta \;\; f0L \qquad\qquad \Gamma \vdash \top, \Delta \;\; f\top R$$

Dato che le regole per $\rightarrow$ e $\leftarrow$ portano contesto vuoto sia a sinistra che a destra, avranno una forma completa a sinistra e una diversa forma completa a destra. Ad esempio, per $\rightarrow L$ abbiamo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \dfrac{\vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \rightarrow B \vdash \Delta}\, \rightarrow L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta' \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta', \Delta}\, fl \rightarrow L \arrow[dr, dash] & & \dfrac{\vdash A, \Delta' \quad B \vdash \Delta}{A \rightarrow B \vdash \Delta', \Delta}\, fr \rightarrow L \arrow[dl, dash] \\
 & \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta' \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta', \Delta}\, f \rightarrow L &
\end{tikzcd}$$

In modo simile per $\rightarrow R$ e $\rightarrow U$, e simmetricamente per $\leftarrow$. Per evitare fraintendimenti, specifichiamo almeno le sei regole ottenute liberalizzando i contesti in $\rightarrow R$ e $\rightarrow U$ (le regole per $\leftarrow$ si possono poi desumere per simmetria)

$$\frac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash B \rightarrow A}\, fl \rightarrow R \qquad\qquad \frac{B \vdash A, \Delta}{\vdash B \rightarrow A, \Delta}\, fr \rightarrow R \qquad\qquad \frac{\Gamma, B \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash B \rightarrow A, \Delta}\, f \rightarrow R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta}\, fl{\rightarrow}L \qquad \frac{\vdash A, \Delta' \quad B \vdash \Delta}{A \rightarrow B \vdash \Delta', \Delta}\, fr{\rightarrow}L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta', \Delta}\, f{\rightarrow}L$$

È ora facile definire estensioni per il calcolo **B**. Per ogni calcolo dei sequenti **X**, diremo **XL** la versione di **X** liberalizzata a sinistra, cioè il calcolo dei sequenti ottenuto considerando la forma completa a sinistra delle regole operazionali di **X**. Piú esplicitamente, ad esempio, **BL** ha gli stessi assiomi e le stesse regole strutturali di **B**, e le regole:

$f \otimes L$, $f\invamp L$, $f1L$, $f \oplus L$, $f\&L$, $f0L$,

$\invamp R$, $\otimes R$, $\perp R$, $\&R$, $\oplus R$, $\top R$,

$fl{\rightarrow}L$, $fl{\leftarrow}L$, $fl{\rightarrow}U$, $fl{\leftarrow}U$,

${\leftarrow}R$, ${\rightarrow}R$.

Notare che gli assiomi $\perp L$ e $1R$ rimangono invariati, in quanto assiomi di riflessione, che non portano contesto.

Per ogni calcolo **X**, definiamo **XR** simmetricamente, liberalizzando a destra. Dato poi che il fatto di liberalizzare a sinistra regole che sono già complete a destra dà regole complete, il calcolo **BLR** (che coincide con **BRL**) si ottiene, per così dire, premettendo f a tutte le regole sui connettivi. Si noti che liberalizzando $cutR$ a sinistra si ottiene la regola di taglio nella sua forma completa (full cut):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\, fcut$$

dove invece liberalizzare $cutL$ a sinistra non ha alcun effetto. $fcut$ è una regola ammissibile in **BL**, **BR** e in tutte le loro estensioni, come dimostrato in [BFS].

Le logiche **B**, **BL**, **BR**, **BLR** sono tutte di tipo lineare, nel senso che non hanno le tradizionali regole strutturali di indebolimento e contrazione. Vediamo ora estensioni date anche con tali regole strutturali (mentre nel prossimo capitolo verranno considerati modi di estendere **B** aggiungendo altri tipi di regole strutturali):

weakening:

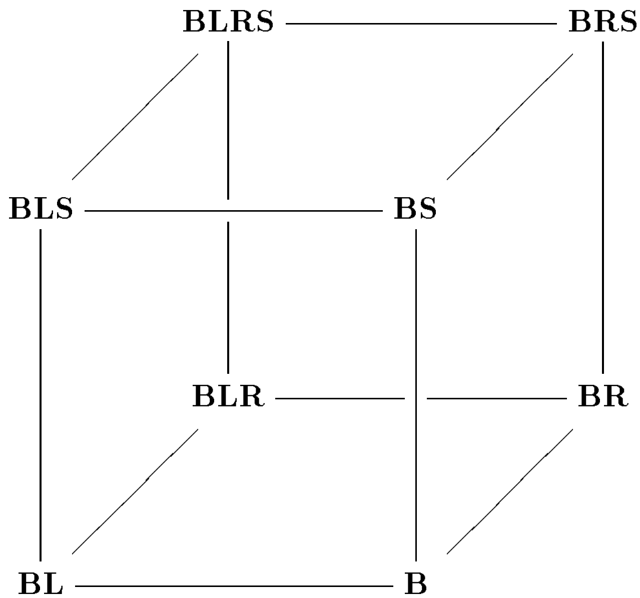
$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\, wL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \Delta}{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Delta}\, wR$$

contraction:

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\, cL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Sigma, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Delta}\, cR$$

Scriveremo **XW** per il calcolo ottenuto dal calcolo **X** aggiungendo le due regole di indebolimento, e allo stesso modo scriveremo **XC** nel caso si aggiunga la contrazione. Per evitare notazioni troppo lunghe, scriveremo poi **XS** per il calcolo **XWC** (che è poi lo stesso di **XCW**).

Così, dato che l'ordine delle estensioni che si ottengono con **L**, **R**, **S**, è irrilevante, (e dato che banalmente la loro ripetizione non avrebbe effetto), otteniamo il seguente cubo di logiche che estendono **B**.



Molte di esse equivalgono a logiche note: **BLRS** è la logica proposizionale classica, **BLS** è la logica intuizionistica, **BL** è un sistema per la logica lineare intuizionistica, **BLR** è la logica lineare classica (senza esponenziali) e **BS** corrisponde a un tipo di logica quantistica. Vedremo meglio tali equivalenze nei prossimi capitoli.

A tutte le logiche del cubo si può adattare la procedura di eliminazione dei tagli data per **B**, come dimostrato in [BFS] e riportato in Appendice A. Alle logiche del quadrato diagonale di vertici **B**, **BS**, **BLR**, **BLRS**, si estende facilmente il teorema di simmetria dato per **B**: delle logiche simmetriche parleremo diffusamente nel prossimo capitolo. Al contrario, le logiche del quadrato **BL**, **BR**, **BLS**, **BRS** sono asimmetriche: di esse tratteremo nel terzo capitolo.

Capitolo 2

Logiche simmetriche e traduzioni

2.1 Logiche simmetriche

2.1.1 Equivalenza della logica del vero con quella del falso

Abbiamo visto, attraverso il principio di riflessione, che il calcolo **B** si può sviluppare come calcolo del vero e del falso a partire dagli assiomi di base, che a loro volta si potrebbero ricavare dai soli assiomi su variabili proposizionali p (cf. 1.2.5). Distinguiamo ora due tipi di variabili proposizionali: p^v e p^f. Sulle variabili p^v si calcolerà il vero, cioè si daranno le regole su $\parr$, &, $\to$, $\bot$, $\top$; sulle variabili p^f si calcolerà il falso, cioè si daranno le regole su $\otimes$, $\oplus$, $\leftarrow$, 1, 0. Si ottengono così due logiche, una simmetrica dell'altra, che chiameremo logica del vero e logica del falso. Esse si possono spiegare una in termini dell'altra, se si spiega il vero in termini del falso e il falso in termini del vero. Il modo per dire che la formula B è falsa con il vero sarà

$$B \text{ } \mathit{falsa} \equiv B^{\perp} \text{ } \mathit{vera}$$

dove $(p^f)^{\perp} \equiv p^v$ e $\circ_F^{\perp} \equiv \circ_V$, per ogni costante del linguaggio del falso. Ugualmente diremo che A è vera con il falso ponendo

$$A \text{ } \mathit{vera} \equiv A^{\perp} \text{ } \mathit{falsa}$$

dove $(p^v)^{\perp} \equiv p^f$ e $\circ_V^{\perp} \equiv \circ_F$, per ogni costante del linguaggio del vero. Ne consegue che $A^{\perp\perp} = A$ (cioè che sono la stessa formula) per ogni formula A, della logica del vero o della logica del falso, come si dimostra per induzione sulla complessità della formula. Indicando con $\vdash_V$ il segno di sequente nella logica del vero e con $\vdash_F$ il segno di sequente nella logica del falso, avremo l'equivalenza fra le due logiche, cioè:

Proposizione 2.1.1 *Per ogni coppia Γ, Δ di liste finite di formule nel linguaggio della logica del vero, vale*

$$\Gamma \vdash_V \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \Delta^{\perp} \vdash_F \Gamma^{\perp}$$

e analogamente vale

$$\Gamma \vdash_F \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \Delta^\perp \vdash_V \Gamma^\perp$$

per ogni coppia Γ, Δ *di liste finite di formule nel linguaggio della logica del falso, dove* $\Gamma^\perp$ *è la lista* $C_1^\perp, \ldots, C_n^\perp$ *se* Γ *è* $C_1, \ldots, C_n$.

Dimostrazione. Le due equivalenze si dimostrano in modo analogo, per induzione sulla profondità della derivazione. Gli assiomi $A \vdash_V A$ (rispettivamente $A \vdash_F A$) vengono scambiati con gli assiomi $A^\perp \vdash_F A^\perp$ (rispettivamente $A^\perp \vdash_V A^\perp$) e ogni regola su un connettivo $\circ_V$ (rispettivamente $\circ_F$) viene scambiata con la sua regola simmetrica (cf. paragrafo 1.4.1), che riguarda il connettivo $\circ_F$ ($\circ_V$). □

Mettendo insieme la logica del vero e del falso, cioè applicando indifferentemente regole di $\vdash_V$ o di $\vdash_F$ agli assiomi, si ottiene il sistema **B**.

2.1.2 Il sistema $^\perp$B e le sue estensioni

Consideriamo ora il sistema di base $^\perp$**B**, cioè il calcolo di base per logiche simmetriche. Esso è stato introdotto per la prima volta in [F], come calcolo di base da cui derivare l'ortologica, viene inoltre considerato come calcolo di base per un trattamento uniforme della cut-elimination per le logiche simmetriche (cf. [FS2]). Qui lo considereremo soprattutto come calcolo per le traduzioni delle logiche simmetriche nella logica di base. $^\perp$**B** è definito su un linguaggio dotato di *due* tipi di variabili proposizionali

$$p^f \qquad\qquad p^v$$

e delle costanti logiche

$$\otimes, \oplus, 1, 0 \qquad\qquad ⅋, \&, \perp, \top$$

cioè tutte le costanti di **B** salvo le implicazioni. $^\perp$**B** è dato da tutte le regole di **B**, salvo quelle sulle implicazioni, come riassumiamo in tabella.

Il sistema $^\perp$**B** eredita da **B** le proprietà di simmetria, visibilità ed eliminazione del taglio. Vediamo ora un modo per interpretare la simmetria nel caso di $^\perp$**B**. Si definisce un operatore, indicato con $\perp$, sulle formule del linguaggio di $^\perp$**B**, ponendo

$$(p^f)^\perp \equiv p^v \qquad\qquad (p^v)^\perp \equiv p^f$$

$$(A \circ B)^\perp \equiv A^\perp \circ^\perp B^\perp$$

dove, per ogni costante logica $\circ$ sinistra (destra), $\circ^\perp$ è la corrispondente costante destra (sinistra). $A^{\perp\perp}$ coincide con A, per ogni formula A, come è facile dimostrare per induzione sulla complessità della formula.

Tabella 2.1: Calcolo di base ${}^{\perp}\mathbf{B}$

Assiomi

$$A \vdash A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\; exchL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\; exchR$$

Regole operazionali

$$\frac{B, A \vdash \Delta}{B \otimes A \vdash \Delta}\; \otimes L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A \parr B}\; \parr R$$

$$\frac{A \vdash \Delta_1 \quad B \vdash \Delta_2}{A \parr B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\; \parr L \qquad \frac{\Gamma_2 \vdash B \quad \Gamma_1 \vdash A}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash B \otimes A}\; \otimes R$$

$$\frac{\vdash \Delta}{1 \vdash \Delta}\; 1L \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \perp}\; \perp R$$

$$\perp \vdash \;\; \perp L \qquad \vdash 1 \;\; 1R$$

$$\frac{B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta}{B \oplus A \vdash \Delta}\; \oplus L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\; \& R$$

$$\frac{A \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta} \quad \frac{B \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta}\; \& L \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B \oplus A} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \oplus A}\; \oplus R$$

$$0 \vdash \Delta \;\; 0L \qquad \Gamma \vdash \top \;\; \top R$$

Regole di taglio

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\; cutL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A \quad A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}\; cutR$$

Si definisce inoltre il sistema simmetrico ${}^{\perp}\mathbf{BS}$, dato dall'estensione di ${}^{\perp}\mathbf{B}$ con le regole strutturali di indebolimento e contrazione, o equivalentemente considerando **BS**, visto nel paragrafo 1.5, nel linguaggio con due tipi di variabili proposizionali e senza connettivi di implicazione. Vediamo qui che, come nel caso dei calcoli dei sequenti per la logica classica, anche nel caso di **BS** e di ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ è sufficiente avere una sola forma (additiva o moltiplicativa) per le regole di congiunzione e disgiunzione, e di conseguenza un solo connettivo per la congiunzione (che indicheremo con &) e un solo connettivo per la disgiunzione (che indicheremo con $\vee$). Infatti, sono valide in **BS** e ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ le seguenti derivazioni:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma, \Gamma \vdash A \otimes B}\otimes R}{\Gamma \vdash A \otimes B}\, cL$$

con cui si vede che la regola moltiplicativa a destra $\otimes R$, assieme alla contrazione, simula la regola additiva a destra;

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash \Delta}{A\&B, A \vdash \Delta}\, f\&L}{A\&B, A\&B \vdash \Delta}\, f\&L}{A\&B \vdash \Delta}\, cL$$

in cui si vede che la regola moltiplicativa a sinistra $f\&L$, valida in **B** (cf. 1.4.4) e quindi in **BS**, con la contrazione, simula la regola moltiplicativa a sinistra;

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A}\, wL \quad \dfrac{\Gamma_1 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B}\, wL}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A\&B}\, \&R$$

in cui si vede che la regola additiva a destra $\&R$, assieme all'indebolimento simula la regola moltiplicativa a destra; e infine

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash \Delta}{A, B \vdash \Delta}\, wL}{A \otimes B \vdash \Delta}\otimes L$$

dove la regola moltiplicativa a sinistra $\otimes L$ con l'indebolimento simula la regola additiva a sinistra. Istanziando opportunamente i Γ delle derivazioni precedenti, si ottiene anche l'uguaglianza $A \otimes B = A\&B$, per ogni coppia di formule A, B. Si procede simmetricamente per ottenere il caso delle disgiunzioni. È dunque sufficiente considerare la sola formulazione additiva, per le regole di ${}^{\perp}\mathbf{BS}$, le cui regole sono date nella successiva tabella. Si omettono inoltre, in ${}^{\perp}\mathbf{BS}$, le regole sulle costanti.

Le regole strutturali di indebolimento e contrazione identificano costanti logiche della logica del vero con costanti logiche della logica del falso. Questo cancella la distinzione dei connettivi in destri e sinistri ottenuta con il principio di riflessione;

Tabella 2.2: Calcolo ${}^{\perp}\mathbf{BS}$

Assiomi

$$A \vdash A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ exchL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ exchR$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ wL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \Delta}{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Delta}\ wR$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ cL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Sigma, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Delta}\ cR$$

Regole operazionali

$$\frac{B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta}{B \vee A \vdash \Delta}\ \oplus L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ \& R$$

$$\frac{A \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta} \quad \frac{B \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta}\ \& L \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B \vee A} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A}\ \oplus R$$

Regole di taglio

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ cutL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A \quad A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ cutR$$

poiché però l'identificazione delle costanti avviene per coppie simmetriche (la coppia $(\otimes, \&)$ è simmetrica della coppia $(\parr, \oplus)$, e la coppia $(1, \top)$ è simmetrica della coppia $(\perp, 0)$) non va perduta la simmetria della tabella delle regole. Questo permette che la definizione dell'operatore $\perp$, data per formule di ${}^{\perp}\mathbf{B}$, sia una buona definizione anche in ${}^{\perp}\mathbf{BS}$. Otterremo semplicemente:

$$\&^{\perp} \equiv \oplus \qquad \oplus^{\perp} \equiv \&$$

$$\top^{\perp} \equiv 0 \qquad 0^{\perp} \equiv \top$$

Per i sistemi ${}^{\perp}\mathbf{B}$ e ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ si ottiene dunque il seguente teorema di simmetria, che viene anche citato come principio di "flipping" ("swapping"), ed è fondamentale per l'eliminazione del taglio in ortologica (cf. [F]) e, in generale, nelle estensioni di ${}^{\perp}\mathbf{B}$ (cf. [FS2]); qui applicheremo tale principio per l'eliminazione dei tagli in ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ e nel sistema da esso derivato $\downarrow^{\perp}\mathbf{BS}$, che vedremo in seguito.

Teorema 2.1.2 *Per ogni coppia di liste finite di formule* Γ, Δ

$$\Gamma \vdash_{{}^{\perp}\mathbf{B}} \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \Delta^{\perp} \vdash_{{}^{\perp}\mathbf{B}} \Gamma^{\perp}$$

e

$$\Gamma \vdash_{{}^{\perp}\mathbf{BS}} \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \Delta^{\perp} \vdash_{{}^{\perp}\mathbf{BS}} \Gamma^{\perp}$$

con una derivazione della stessa struttura.

Dimostrazione. Di nuovo, l'equivalenza si dimostra per induzione sulla profondità della derivazione. Data una prova di $\Gamma \vdash \Delta$, si ottiene la prova corrispondente per $\Delta^{\perp} \vdash \Gamma^{\perp}$ sostituendo gli assiomi $A \vdash A$ con gli assiomi $A^{\perp} \vdash A^{\perp}$ (in particolare, in ogni formula A, i letterali p^v risultano sostituiti con i letterali p^f, e viceversa); si sostituisce poi, come nel teorema di simmetria per $\mathbf{B}$, ogni regola con la sua simmetrica. □

Si noti che il teorema di simmetria per $\mathbf{B}$ è un corollario del precedente, ottenuto considerando uguali le variabili proposizionali p^v e p^f. Il segno $\perp$ permette ulteriormente, nel caso di ${}^{\perp}\mathbf{B}$, di spiegare il vero in termini di falso, e viceversa, all'interno del sistema stesso. Infatti, l'asserzione $A \vdash B$, letta come *A vera comporta B vera*, equivale a $B^{\perp} \vdash A^{\perp}$, cioè *$B^{\perp}$ vera comporta $A^{\perp}$ vera*, cioè *B falsa comporta A falsa*. In termini piú pratici, $\perp$ è un modo per trattare premesse come conclusioni e viceversa: dato che esso viene a identificare due modi di scrivere uno stesso legame (quello della logica del vero con quello della logica del falso), lo considereremo come una modalità, e le regole che lo riguardano saranno regole strutturali. Il teorema di simmetria assume appunto il ruolo di una "metaregola" per il segno $\perp$. In ${}^{\perp}\mathbf{B}$ vale dunque la seguente regola strutturale su $\perp$:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Delta^{\perp} \vdash \Gamma^{\perp}}$$

Si possono considerare inoltre alcune regole strutturali sulla modalità $\perp$, che permettono di identificare altri sequenti di ${}^{\perp}\mathbf{B}$ e ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ fra loro, dando luogo quindi ad estensioni di tali calcoli. Le seguenti sono chiamate regole di "trasporto" e di "separazione" e sono state introdotte in [F] per poter esprimere rispettivamente la ortologica come estensione di ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ e la logica proposizionale classica come estensione della ortologica.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Delta^{\perp} \vdash} \; tL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\vdash \Gamma^{\perp}, \Delta} \; tR$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta^{\perp}} \; sepL \qquad \frac{\vdash \Gamma, \Delta}{\Gamma^{\perp} \vdash \Delta} \; sepR$$

Sono possibili così varie estensioni di ${}^{\perp}\mathbf{B}$, oltre a ${}^{\perp}\mathbf{BS}$. Elenchiamo le logiche ottenute a partire da ${}^{\perp}\mathbf{B}$ nel seguente teorema, la cui dimostrazione è contenuta in [F]:

Teorema 2.1.3 *Il sistema simmetrico* $\mathbf{B}$ *ammette le seguenti estensioni simmetriche:*

- ${}^{\perp}\mathbf{BS}$*, che chiameremo anche ortologica di base, e che equivale alla logica quantistica paraconsistente di [DCG];*
- ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ *+ regole strutturali di trasporto, che scriveremo* ${}^{\perp}\mathbf{O}$*, e che equivale alla ortologica;*
- ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ *+ regole strutturali di separazione, che equivale a* ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ *stessa;*
- ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ *+ regole strutturali di trasporto e separazione, che scriveremo* ${}^{\perp}\mathbf{C}$*, e che equivale alla logica proposizionale classica;*
- ${}^{\perp}\mathbf{B}$ *+ regole strutturali di trasporto, che scriveremo* ${}^{\perp}\mathbf{OL}$*, e che equivale alla ortologica lineare;*
- ${}^{\perp}\mathbf{B}$ *+ regole strutturali di separazione, che equivale a* ${}^{\perp}\mathbf{B}$ *stessa;*
- ${}^{\perp}\mathbf{B}$ *+ regole strutturali di trasporto e separazione, che scriveremo* ${}^{\perp}\mathbf{L}$*, e che equivale alla logica lineare classica proposizionale senza esponenziali;*

Considereremo inoltre la seguente coppia simmetrica di regole strutturali, **st**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma, \Delta^{\perp} \vdash \Delta'} \; stL \qquad \frac{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Gamma^{\perp}, \Delta} \; stR$$

Avere la coppia di regole **st** equivale ad avere separazione e trasporto insieme. Infatti, ad esempio, stL è derivabile come segue:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma, \Delta^{\perp}, \Delta'^{\perp} \vdash}\, tL}{\Gamma, \Delta^{\perp} \vdash \Delta'}\, sepL$$

o con una analoga derivazione che sfrutta $sepR$ e tR. Viceversa, le regole **t** si ricavano dalle regole **st**, ponendo Δ' e Γ' uguali a vuoto, le regole **sep** si ricavano dalle regole **st** ponendo Γ e Δ uguale a vuoto. Le regole **st**, dunque, danno luogo ai seguenti sistemi per la logica classica lineare e per la logica classica:

$$\mathbf{L}' \equiv \ \mathbf{B} \ + \ \text{regole } \mathbf{st} \qquad\qquad \mathbf{C}' \equiv \ \mathbf{BS} \ + \ \text{regole } \mathbf{st}$$

Queste due equivalenze si possono dimostrare in modo simile. Vediamo qui nei dettagli il caso non lineare, dato che è quello più importante per ottenere poi risultati su logiche quantistiche. Dimostriamo per prima cosa il seguente lemma:

Lemma 2.1.4 *In* $^{\perp}\mathbf{C}'$ *sono valide le seguenti regole di* **LK***:*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\, fcut$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\, f\&L \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\, f\&L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\, f \vee R \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\, f \vee R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\, f \vee L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\, f\&R$$

Dimostrazione. Deriviamo ad esempio la regola $f \vee L$, usando la sua forma pura $\vee L$ e le regole strutturali **st**.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{A \vdash \Gamma^{\perp}, \Delta}\, stR \quad \cfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{B \vdash \Gamma^{\perp}, \Delta}\, stR}{A \vee B \vdash \Gamma^{\perp}, \Delta}\, \vee L}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\, stL$$

La derivazione delle altre regole complete è del tutto simile. Ricordiamo però che le regole complete $f\&L$ e $f \vee R$ possono essere derivate anche senza regole **st**, per taglio, già nel calcolo di base **B**, come visto nel lemma 1.4.4. $\square$

Definiamo ora la seguente interpretazione delle formule del linguaggio di $^{\perp}\mathbf{C}'$ nelle formule del linguaggio di **LK**:

$$I(p^v) \equiv p \qquad\qquad I(p^f) \equiv \neg p \qquad\qquad I(A \circ B) \equiv I(A) \circ I(B)$$

per ogni connettivo binario $\circ$.

Viceversa, consideriamo la seguente interpretazione delle formule di **LK** (in un linguaggio senza implicazione) nelle formule di $^{\perp}\mathbf{C}'$:

$$J(p) \equiv p^v \qquad J(\neg A) \equiv (J(A))^{\perp} \qquad J(A \circ B) \equiv J(A) \circ J(B)$$

per ogni connettivo binario $\circ$.

È ora facile dimostrare l'equivalenza.

Proposizione 2.1.5 *I sistemi* $^{\perp}\mathbf{C}'$ *e* **LK** *sono equivalenti, cioè valgono le seguenti equivalenze:*

$$\Gamma \vdash_{^{\perp}\mathbf{C}'} \Delta \Leftrightarrow I(\Gamma) \vdash_{\mathbf{LK}} I(\Delta)$$

e

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LK}} \Delta \Leftrightarrow J(\Gamma) \vdash_{^{\perp}\mathbf{C}'} J(\Delta)$$

Dimostrazione. È immediato vedere che $I(J(A)) = A$, per ogni formula classica, e che $J(I(A)) = A$, per ogni formula di $^{\perp}\mathbf{C}'$. Allora, per ottenere le equivalenze, è sufficiente provare:

$$\Gamma \vdash_{^{\perp}\mathbf{C}'} \Delta \Rightarrow I(\Gamma) \vdash_{LK} I(\Delta)$$

e

$$\Gamma \vdash_{LK} \Delta \Rightarrow J(\Gamma) \vdash_{^{\perp}\mathbf{C}'} J(\Delta)$$

Per dimostrarle, è sufficiente notare che le regole strutturali *st* corrispondono all'introduzione a sinistra e a destra del connettivo per la negazione $\neg$, e inoltre, per la seconda, applicare il lemma appena visto. $\square$

In modo analogo si può dimostrare l'equivalenza di $\mathbf{L}'$ con un calcolo a due parti per la logica lineare classica.

La logica classica e lineare classica si possono dunque esprimere con la sola aggiunta di regole strutturali alla logica di base. Tale risultato era stato ottenuto anche nel capitolo primo, con i sistemi **BLR** per la logica lineare classica e **BLRS** per la logica classica, ma in modo imperfetto: **L** ed **R** non sono regole strutturali del calcolo dei sequenti, ma soltanto "ricette" per intervenire sulla struttura. Regole strutturali corrispondenti a tali "ricette", inoltre, si avranno, molto probabilmente, non per sequenti, ma per sequenti nidificati. La soluzione qui data con il calcolo simmetrico $^{\perp}\mathbf{B}$ ha un ulteriore vantaggio: può esprimere anche logiche simmetriche intermedie fra $^{\perp}\mathbf{B}$ e la logica classica (logiche quantistiche), come abbiamo visto nel teorema 2.1.3. Essa però ha un prezzo: escludere a priori le logiche asimmetriche (intuizionistiche), che si possono invece esprimere a partire da **B**, tramite **L** e **R**, come è stato visto nel primo capitolo.

2.2 Traduzioni

2.2.1 Espressione della logica classica e lineare classica nei sistemi simmetrici di base

Abbiamo appena visto come si possano identificare asserzioni, espresse in sequenti e corrispondenti a diversi modi di tradurre gli stessi legami metalinguistici, tramite modalità e regole strutturali, nel caso del sistema ${}^{\perp}\mathbf{B}$ e delle sue estensioni. In particolare, le regole strutturali **st** identificano $\Gamma \vdash A, \Delta$ con $\Gamma, A^{\perp} \vdash \Delta$. Facendo un passo ulteriore, condizioniamo tale identificazione all'essere A di un certo tipo di formule, che chiamiamo "formule trasportabili", e che indichiamo con il prefisso $\downharpoonleft$. Una formula trasportabile $\downharpoonleft A$ ha la proprietà di poter essere trasportata da sinistra a destra del sequente, e viceversa, lasciando fissi i contesti, anche all'interno della logica di base. Per formule trasportabili valgono cioè le regole:

$$\frac{\Gamma \vdash \downharpoonleft\Sigma, \Delta}{\Gamma, \downharpoonleft\Sigma^{\perp} \vdash \Delta}\ \downharpoonleft stL \qquad\qquad \frac{\Gamma, \downharpoonleft\Sigma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \downharpoonleft\Sigma^{\perp}, \Delta}\ \downharpoonleft stR$$

Come nel caso delle regole di indebolimento e contrazione, espresse in logica lineare solo per formule con esponenziali, otteniamo così regole st esprimibili in ${}^{\perp}\mathbf{B}$. Come nel caso appena visto della modalità $\perp$, anche la modalità $\downharpoonleft$ si può introdurre tramite variabili proposizionali primitive e la definizione di un operatore opportuno. Definiamo quindi il sistema $\downharpoonleft{}^{\perp}\mathbf{B}$ come segue. Consideriamo un linguaggio in cui ci sono, oltre ai connettivi di ${}^{\perp}\mathbf{B}$, quattro tipi di variabili proposizionali: p^v, p^f, q^v, q^f. Definiamo ora un operatore unario $\downharpoonleft$ sulle formule come segue:

$$\downharpoonleft p^v \equiv q^v, \qquad \downharpoonleft p^f \equiv q^f, \qquad \downharpoonleft q^v \equiv q^v, \qquad \downharpoonleft q^f \equiv q^f,$$

Inoltre, estendiamo la definizione dell'operatore $\perp$, già definito nel caso di ${}^{\perp}\mathbf{B}$, ponendo:

$$(q^v)^{\perp} \equiv q^f \qquad\qquad (q^f)^{\perp} \equiv q^v.$$

Date tali definizioni, si ottiene:

Proposizione 2.2.1 *Per ogni formula A, valgono le uguaglianze:*

$$A^{\perp\perp} = A, \qquad \downharpoonleft\downharpoonleft A = \downharpoonleft A, \qquad (\downharpoonleft A)^{\perp} = \downharpoonleft(A^{\perp})$$

Dimostrazione. La prova si ottiene per induzione sulla complessità di A, notando che valgono:

$$x^{\perp\perp} = x, \qquad \downharpoonleft\downharpoonleft x = \downharpoonleft x, \qquad (\downharpoonleft x)^{\perp} = \downharpoonleft(x^{\perp})$$

per ogni variabile proposizionale x, di qualsiasi tipo. $\square$

Si noti che, essendo l'operatore $\downarrow$ idempotente e non nilpotente come $\perp$, le formule costituite dai letterali q^v e q^f, cioè le formule precedute da $\downarrow$, sono un sottoinsieme proprio dell'insieme di tutte le formule. Per questo ha senso definire qualcosa solo per formule con $\downarrow$. Si definiscono quindi il calcolo $\downarrow^\perp\mathbf{B}$, e il suo analogo non lineare, $\downarrow^\perp\mathbf{BS}$, come nelle successive tabelle.

Per $\downarrow^\perp\mathbf{B}$ e $\downarrow^\perp\mathbf{BS}$ si possono dimostrare i seguenti teoremi di struttura:

Teorema 2.2.2 *Per ogni coppia di liste finite di formule Γ, Δ valgono le equivalenze*

$$\Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{B}} \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \Delta^\perp \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{B}} \Gamma^\perp$$

$$\Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{BS}} \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \Delta^\perp \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{BS}} \Gamma^\perp$$

inoltre valgono le seguenti implicazioni:

$$\textit{se } \Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{B}} \Delta \textit{ allora } \downarrow\Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{B}} \downarrow\Delta$$

$$\textit{se } \Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{BS}} \Delta \textit{ allora } \downarrow\Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{BS}} \downarrow\Delta$$

Dimostrazione. Le due equivalenze si provano come nel lemma 2.1.2; le due implicazioni, analogamente, si dimostrano per induzione sulla profondità della derivazione. Data una prova di $\Gamma \vdash \Delta$, si ottiene la prova corrispondente per $\downarrow\Gamma \vdash \downarrow\Delta$ sostituendo gli assiomi $A \vdash A$ con gli assiomi $\downarrow A \vdash \downarrow A$ (quindi, in ogni formula A, i letterali p^v risultano sostituiti con i letterali q^v, e i letterali p^f con i letterali q^f), e applicando poi esattamente le stesse regole. $\square$

In $\downarrow^\perp\mathbf{B}$ e $\downarrow^\perp\mathbf{BS}$ valgono dunque le seguenti regole:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Delta^\perp \vdash \Gamma^\perp}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\downarrow\Gamma \vdash \downarrow\Delta}$$

Si può provare inoltre un analogo del lemma 2.1.4. Anche qui, esplicitiamo il risultato nel caso non lineare, la dimostrazione nel caso lineare sarà analoga.

Lemma 2.2.3 *In $\downarrow^\perp\mathbf{BS}$ valgono le seguenti regole:*

$$\frac{\Gamma \vdash \downarrow\Delta, A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \downarrow\Delta, \Delta'} \downarrow cutL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \downarrow\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \downarrow\Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \downarrow cutR$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} f\&L \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} f\&L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} f \vee R \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} f \vee R$$

$$\frac{\downarrow\Gamma, A \vdash \Delta \quad \downarrow\Gamma, B \vdash \Delta}{\downarrow\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \downarrow \vee L \qquad \frac{\downarrow\Gamma \vdash A, \Delta \quad \downarrow\Gamma \vdash B, \Delta}{\downarrow\Gamma \vdash A\&B, \Delta} \downarrow\&R$$

Tabella 2.3: Calcolo di base $\downarrow^{\perp}\mathbf{B}$

Assiomi

$$A \vdash A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ exchL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ exchR$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma, \downarrow\Delta^{\perp} \vdash \Delta'}\ \downarrow stL \qquad \frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \downarrow\Gamma^{\perp}, \Delta}\ \downarrow stR$$

Regole operazionali

$$\frac{B, A \vdash \Delta}{B \otimes A \vdash \Delta}\ \otimes L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A \parr B}\ \parr R$$

$$\frac{A \vdash \Delta_1 \quad B \vdash \Delta_2}{A \parr B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \parr L \qquad \frac{\Gamma_2 \vdash B \quad \Gamma_1 \vdash A}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash B \otimes A}\ \otimes R$$

$$\frac{\vdash \Delta}{1 \vdash \Delta}\ 1L \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \perp}\ \perp R$$

$$\perp \vdash \ \perp L \qquad \vdash 1 \ \ 1R$$

$$\frac{B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta}{B \oplus A \vdash \Delta}\ \oplus L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ \& R$$

$$\frac{A \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta} \quad \frac{B \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta}\ \& L \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B \oplus A} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \oplus A}\ \oplus R$$

$$0 \vdash \Delta \ \ 0L \qquad \Gamma \vdash \top \ \ \top R$$

Regole di taglio

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ cutL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A \quad A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ cutR$$

Tabella 2.4: Calcolo $\downarrow^{\perp}\mathbf{BS}$

Assiomi

$$A \vdash A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ exchL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ exchR$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ wL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \Delta}{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Delta}\ wR$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ cL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Sigma, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Delta}\ cR$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma, \downarrow\Delta^{\perp} \vdash \Delta'}\ {\downarrow}stL \qquad \frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \downarrow\Gamma^{\perp}, \Delta}\ {\downarrow}stR$$

Regole operazionali

$$\frac{B \vdash \Delta \quad A \vdash \Delta}{B \vee A \vdash \Delta}\ \oplus L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}\ \&R$$

$$\frac{A \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta} \quad \frac{B \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}\ \&L \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B \vee A} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A}\ \oplus R$$

Regole di taglio

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ cutL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A \quad A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ cutR$$

Dimostrazione. Deriviamo ad esempio la regola $\downarrow \vee L$, usando la sua forma $\vee L$ e le regole strutturali $\downarrow$**st**.

$$\dfrac{\dfrac{\downarrow\Gamma, A \vdash \Delta}{A \vdash \downarrow\Gamma^{\perp}, \Delta}\, stR \quad \dfrac{\downarrow\Gamma, B \vdash \Delta}{B \vdash \downarrow\Gamma^{\perp}, \Delta}\, stR}{\dfrac{A \vee B \vdash \downarrow\Gamma^{\perp}, \Delta}{\downarrow\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\, \downarrow stL}\, \vee L$$

La derivazione di $f\&L$ e di $f \vee R$ si può fare per taglio, già nel calcolo di base **B**, come visto nel lemma 1.4.4. A maggior ragione dunque le stesse regole valgono nel caso di contesti con $\downarrow$. $\square$

È ora facile definire l'immersione di $^{\perp}\mathbf{L}'$ in $\downarrow^{\perp}\mathbf{B}$ e di $^{\perp}\mathbf{C}'$ in $\downarrow^{\perp}\mathbf{BS}$. Come al solito, si possono dare le definizioni attraverso una variabile $\circ$ per connettivi binari. Tale definizione si adatta sia al caso lineare sia a quello non lineare. Definiamo prima di tutto una mappa dimenticante $(\cdot)'$, da formule nel linguaggio di $\downarrow^{\perp}\mathbf{B}$ e $\downarrow^{\perp}\mathbf{BS}$ in formule del linguaggio di $^{\perp}\mathbf{L}'$ e $^{\perp}\mathbf{C}'$, ponendo

$$(p^v)' \equiv p^v \qquad (p^f)' \equiv p^f \qquad (q^v)' \equiv p^v \qquad (q^f)' \equiv p^f$$

e

$$(A \circ B)' \equiv A' \circ B'$$

La funzione così definita mappa ogni formula non modale in sè e le formule $\downarrow A$ in A, cioè dimentica la modalità $\downarrow$. Viceversa, si definisce una traduzione δ di formule nel linguaggio lineare o classico di $^{\perp}\mathbf{L}'$ e $^{\perp}\mathbf{C}'$ in formule nel linguaggio con modalità, con le clausole:

$$\delta(p^v) \equiv q^v \qquad \delta(p^f) \equiv q^f$$

e

$$\delta(A \circ B) \equiv \delta(A) \circ \delta(B).$$

Tale traduzione mappa la formula A nella formula $\downarrow A$. Si osservi che $(\delta A)' \equiv A$ per ogni formula A.

Con queste definizioni, si può provare come segue che la logica classica, espressa dal sistema $^{\perp}\mathbf{C}'$, e la logica lineare classica, espressa dal sistema $^{\perp}\mathbf{L}'$, si immergono nella logica di base data dai sistemi $\downarrow^{\perp}\mathbf{BS}$ e $\downarrow^{\perp}\mathbf{B}$, rispettivamente.

Teorema 2.2.4 *Date le liste finite di formule Γ, Δ, nel linguaggio lineare o classico, valgono le equivalenze*

$$\Gamma \vdash_{^{\perp}\mathbf{L}'} \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \delta\Gamma \vdash_{\downarrow^{\perp}\mathbf{B}} \delta\Delta$$

$$\Gamma \vdash_{^{\perp}\mathbf{C}'} \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \delta\Gamma \vdash_{\downarrow^{\perp}\mathbf{BS}} \delta\Delta$$

Dimostrazione. Si può dimostrare, per induzione sulla derivazione, estendendo il risultato visto nel lemma 2.2.2, che sono valide le seguenti implicazioni:

$$\Gamma \vdash_{{}^\perp\mathbf{L}'} \Delta \Rightarrow \delta\Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{B}} \delta\Delta$$

$$\Gamma \vdash_{{}^\perp\mathbf{C}'} \Delta \Rightarrow \delta\Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{BS}} \delta\Delta$$

Infatti, per i sequenti derivati senza l'uso delle regole **st** vale il risultato del lemma 2.2.2, mentre le regole **st** di ${}^\perp\mathbf{L}'$, ${}^\perp\mathbf{C}'$, vanno semplicemente sostituite con le regole $\downarrow$**st** di $\downarrow^\perp\mathbf{B}$ e $\downarrow^\perp\mathbf{BS}$. Inoltre, valgono anche le seguenti:

$$\Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{B}} \Delta \Rightarrow \Gamma' \vdash_{{}^\perp\mathbf{L}'} \Delta'$$

$$\Gamma \vdash_{\downarrow^\perp\mathbf{BS}} \Delta \Rightarrow \Gamma' \vdash_{{}^\perp\mathbf{C}'} \Delta'$$

come è immediato verificare, dato che ogni regola della logica di base è una regola valida in logica lineare o classica. Applicando queste ultime implicazioni alle premesse $\delta(\Gamma) \vdash \delta(\Delta)$, dato che $(\delta A)' = A$ per ogni formula A nel linguaggio di di ${}^\perp\mathbf{L}'$ e di ${}^\perp\mathbf{C}'$, si ricavano le due implicazioni opposte, e quindi si ottengono le due equivalenze cercate. $\Box$

Con questo risultato abbiamo provato che la logica classica si può immergere nell'ortologica di base, o logica quantistica paraconsistente; o meglio, si vede che le due logiche coesistono all'interno del sistema $\downarrow^\perp\mathbf{BS}$: una lavorerà solo sulle variabili di tipo p, l'altra anche sulle variabili di tipo q. Definendo la modalità $\downarrow$ tramite un operatore, abbiamo potuto evitare regole di introduzione di $\downarrow$ come connettivo unario (per intendersi: regole come quelle che introducono gli esponenziali in logica lineare). Questo permette di definire il comportamento delle formule con $\downarrow$ (le formule "classiche", per intendersi) tramite le sole regole strutturali $\downarrow$**st**. Le formule di tipo $\downarrow A$, quindi, sono caratterizzate solo dal fatto di poter essere trattate con regole diverse, senza il bisogno di confrontarle con formule "standard". Si noti anzi che in $\downarrow^\perp\mathbf{BS}$ vale il seguente:

Proposizione 2.2.5 *In* $\downarrow^\perp\mathbf{BS}$ *non sono provabili né* $\downarrow A \vdash A$ *per ogni* A*, né* $A \vdash \downarrow A$ *per ogni* A*.*

Dimostrazione. Se ad esempio fosse provabile $\downarrow A \vdash A$ per ogni A, lo sarebbe anche $A^\perp \vdash \downarrow A^\perp$ per ogni A, cioè sarebbe provabile anche $B \vdash \downarrow B$ per ogni B, dato che ogni B è $A^\perp$ per qualche A. Ma allora sarebbe provabile anche $A = \downarrow A$ per ogni A, che è falso, perchè i tipi p e q delle variabili proposizionali sono diversi. $\Box$

2.2.2 Traduzione della logica classica nell'ortologica e dell'ortologica nell'ortologica di base

Abbiamo accennato, nel teorema 2.1.3, al fatto che l'ortologica di base $\downarrow\mathbf{BS}$ ammette, fra le sue estensioni, il sistema ${}^\perp\mathbf{O}$ per la ortologica, dato da

$${}^\perp\mathbf{O} \equiv {}^\perp\mathbf{BS} \ + \ \text{regole } \mathbf{t}$$

A sua volta, ${}^{\perp}\mathbf{O}$ si estende al sistema ${}^{\perp}\mathbf{C}$ per la logica classica, come segue:

$$ {}^{\perp}\mathbf{C} \equiv {}^{\perp}\mathbf{O} \ + \ \text{regole } \mathbf{sep} = {}^{\perp}\mathbf{BS} \ + \ \text{regole } \mathbf{t} \ + \ \text{regole } \mathbf{sep} $$

Con la stessa tecnica usata per l'immersione di ${}^{\perp}\mathbf{C}'$ in ${}^{\perp}\mathbf{BS}$, vista nel paragrafo precedente, si possono immergere ${}^{\perp}\mathbf{C}$ in ${}^{\perp}\mathbf{O}$ e ${}^{\perp}\mathbf{O}$ in ${}^{\perp}\mathbf{BS}$. Basta dare le regole $\mathbf{t}$ e $\mathbf{sep}$ condizionandole a modalità. Si considerano cioè le regole

$$ \frac{\Gamma \vdash \downarrow_2\Delta}{\Gamma, \downarrow_2\Delta^{\perp} \vdash} \downarrow_2 tL \qquad\qquad \frac{\downarrow_2\Gamma \vdash \Delta}{\vdash \downarrow_2\Gamma^{\perp}, \Delta} \downarrow_2 tR $$

$$ \frac{\Gamma, \downarrow_1\Delta \vdash}{\Gamma \vdash \downarrow_1\Delta^{\perp}} \downarrow_1 sepL \qquad\qquad \frac{\vdash \downarrow_1\Gamma, \Delta}{\downarrow_1\Gamma^{\perp} \vdash \Delta} \downarrow_1 sepR $$

e si possono definire quindi i sistemi

$$ \downarrow_2{}^{\perp}\mathbf{BS} \equiv {}^{\perp}\mathbf{BS} \ + \ \text{regole } \downarrow_2\mathbf{t} $$

e

$$ \downarrow_1{}^{\perp}\mathbf{O} \equiv {}^{\perp}\mathbf{O} \ + \ \text{regole } \downarrow_1\mathbf{sep} $$

dove le modalità $\downarrow_1$ e $\downarrow_2$, in entrambi i sistemi, si possono di nuovo introdurre come operatori su formule, basandosi su variabili proposizionali di tipi diversi. Definite $\downarrow_1$ e $\downarrow_2$, si possono definire le mappe

$$ \delta_1 : {}^{\perp}\mathbf{C} \to \downarrow_1{}^{\perp}\mathbf{O} $$

e

$$ \delta_2 : {}^{\perp}\mathbf{O} \to \downarrow_2{}^{\perp}\mathbf{BS} $$

che mappano formule A in formule $\downarrow_1 A$ e $\downarrow_2 A$ rispettivamente. Nella direzione opposta, si definiscono le mappe dimenticanti. Si ottengono cosí le immersioni di ${}^{\perp}\mathbf{C}$ in $\downarrow_1{}^{\perp}\mathbf{O}$ e di ${}^{\perp}\mathbf{O}$ in $\downarrow_2{}^{\perp}\mathbf{BS}$. Non ripetiamo qui il procedimento, che risulterebbe uguale a quello descritto nel paragrafo precedente. Sarebbe piú interessante il problema della composizione di δ_1 e δ_2, per trovare di nuovo una traduzione della logica classica nell'ortologica di base. Il problema presenta dei punti delicati e si lascia per ora in sospeso.

2.2.3 Traduzione della logica classica nella logica lineare classica e dell'ortologica di base nella logica di base

L'idea delle modalità ottenute attraverso operatori e tipi di variabili proposizionali diversi può essere applicata anche per ottenere traduzioni di logiche non lineari in logiche lineari, cioè della logica classica nella logica lineare classica e di ${}^{\perp}\mathbf{BS}$ in ${}^{\perp}\mathbf{B}$.

È quindi sufficiente considerare un linguaggio dotato dei letterali p^v, p^f, q^v, q^f, su cui si definisce un operatore unario $\#$ come già fatto per $\downarrow$:

$$\#p^v \equiv q^v, \qquad \#p^f \equiv q^f, \qquad \#q^v \equiv q^v, \qquad \#q^f \equiv q^f,$$

mentre la definizione sui connettivi lineari è la seguente:

$$\begin{array}{cc} \#(A \otimes B) \equiv \#A \otimes \#B & \#(A \parr B) \equiv \#A \parr \#B \\ \#1 \equiv 1 & \# \bot \equiv \bot \\ \#(A \& B) \equiv \#A \otimes \#B & \#(A \oplus B) \equiv \#A \parr \#B \\ \#\top \equiv 1 & \#0 \equiv \bot \end{array}$$

Le formule $\#A$ sono quelle che soddisfano indebolimento e contrazione, cioè le regole

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \#\Sigma \vdash \Delta}\ \#wL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \#\Sigma}\ \#wR$$

$$\frac{\Gamma, \#\Sigma, \#\Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \#\Sigma \vdash \Delta}\ \#cL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \#\Sigma, \#\Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \#\Sigma}\ \#cR$$

Si possono quindi definire i sistemi

$$\#^\bot\mathbf{B} \equiv {}^\bot\mathbf{B} \ + \ \text{regole } \#\mathbf{w} \ + \ \text{regole } \#\mathbf{c}$$

e

$$\#^\bot\mathbf{L}' \equiv {}^\bot\mathbf{L}' \ + \ \text{regole } \#\mathbf{w} \ + \ \text{regole } \#\mathbf{c}$$

e in tali sistemi immergere la logica lineare classica e la logica classica, rispettivamente. Otteniamo quindi le immersioni

$$\sigma : {}^\bot\mathbf{BS} \to \#^\bot\mathbf{B}$$

e

$$\sigma : {}^\bot\mathbf{C}' \to \#^\bot\mathbf{L}'$$

date ponendo

$$\begin{array}{cc} \sigma(p^v) \equiv q^v & \sigma(p^f) \equiv q^f \\ \sigma(A \& B) \equiv \sigma(A) \otimes \sigma(B) & \sigma(A \vee B) \equiv \sigma(A) \parr \sigma(B) \end{array}$$

e possiamo definire le funzioni dimenticanti con

$$(p^v)' \equiv (q^v)' \equiv p^v \qquad (p^f)' \equiv (q^f)' \equiv p^f$$

e

$$(A \otimes B)' \equiv (A \& B)' \equiv A' \& B' \qquad (A \parr B)' \equiv (A \oplus B)' \equiv A' \vee B'$$

per cui vale $(\sigma A)' \equiv A$, per ogni formula A del linguaggio non lineare. È facile allora provare la proposizione

Proposizione 2.2.6 *Valgono le seguenti equivalenze:*

$$\Gamma \vdash_{{}^\bot\mathbf{BS}} \Delta \ \textit{se e solo se} \ \#\Gamma \vdash_{\#^\bot\mathbf{B}} \#\Delta$$

$$\Gamma \vdash_{{}^\bot\mathbf{C}'} \Delta \ \textit{se e solo se} \ \#\Gamma \vdash_{\#^\bot\mathbf{L}'} \#\Delta$$

2.2.4 Prova di eliminazione dei tagli per $^{\perp}$**BS** e $\downarrow^{\perp}$**BS**

La discussione che segue della procedura di cut-elimination per tali sistemi utilizza la caratteristica di visibilità delle regole del calcolo, definita in 1.4.2, che $^{\perp}$**BS** e $\downarrow^{\perp}$**BS** ereditano da **B**, e che permette la prova di eliminazione dei tagli per la logica di base (cf. [BFS]). Inoltre, la prova si basa sulla tecnica di "swap", introdotta in [F] per il caso dell'ortologica, che è resa possibile dalla simmetria del calcolo. Essa consiste nel considerare, al posto della derivazione

$$\begin{array}{c} \vdots\, \Pi \\ \Gamma \vdash \Delta \end{array}$$

la sua simmetrica

$$\begin{array}{c} \vdots\, \Pi^{\perp} \\ \Delta^{\perp} \vdash \Gamma^{\perp} \end{array}$$

Infine, la prova seguente non considera le regole di contrazione e scambio, in quanto si fa l'ipotesi che nei sequenti compaiano insiemi finiti e non liste finite

Teorema 2.2.7 *Ogni derivazione in* $^{\perp}$**BS** *si trasforma in una derivazione in cui* $cutL$ *e* $cutR$ *non compaiono.*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste, come al solito, nel vedere che una regola di taglio applicata come ultima regola di una derivazione senza tagli si può eliminare. Questo a sua volta si dimostra per induzione sul grado e sul rango. Il caso di rango 2 non viene riportato. Per il caso di rango maggiore di 2, basta controllare che nel sottoalbero di derivazione:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, \Pi_1 \\ \Gamma_1 \vdash A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots\, \Pi_2 \\ \Gamma_2, A \vdash \Delta_2 \end{array}}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2}\ cutLA$$

l'applicazione di $cutLA$ si può sollevare fino a dove A viene introdotta. Infatti, in

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, \Pi_1 \\ \Gamma_1 \vdash A \end{array} \quad A \vdash \Delta_2^n}{\Gamma_1 \vdash \Delta_2^n}\ cutA$$

$cutA$ si può considerare un'applicazione di $cutR$,e dunque la discussione si riduce al caso di $cutR$, cioè:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, \Pi_1 \\ \Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots\, \Pi_2 \\ A \vdash \Delta_2 \end{array}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ cutRA$$

che è semplicemente il caso simmetrico a quello di $cutL$.

Vediamo ora come $cutL$ si possa alzare lungo Π_2. Consideriamo l'ultima regola di Π_2. Se si tratta di una qualsiasi regola a destra $\star R$ ($\& R$, $\vee R$, wR, stR), si possono scambiare le applicazioni di $cutL$ e $\star R$, ottenendo:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2'}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2'}\, cutL}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2}\, \star R$$

Se l'ultima regola è wL, cioè se Π_2 termina con:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \Pi_2' \\ \Gamma_2' \vdash \Delta_2\end{array}}{A, \Gamma_2 \Delta_2}\, wL$$

si può evitare l'applicazione di $cutL$, con la derivazione:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \Pi_2 \\ \Gamma_2' \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Delta_2}\, wL$$

Se l'ultima regola è stL, si distinguono più casi. La principale distinzione è la seguente:

- A non proviene da destra,
- A proviene da destra.

Nel primo caso, si solleva $cutLA$ sopra stL. Nel secondo caso, si fa un'ulteriore distinzione:

- A non appare a sinistra nella premessa di stL,
- A appare a sinistra nella premessa di stL.

Nel primo caso, abbiamo

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \dfrac{\Gamma_2', \vdash A^{\perp}, \Delta_2'}{\Gamma_2, A \vdash \Delta_2}\, stL}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2}$$

che viene convertita in

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \begin{array}{c}\vdots\, swap \\ A, \Delta_2^{\perp} \vdash \Gamma_2^{\perp}\end{array}}{\Gamma_1, \Delta_2^{\perp} \vdash \Gamma_2^{\perp}}\, cutLA \\ \vdots\, swap \\ \Gamma_2 \vdash, \Gamma_1^{\perp} \Delta_2\end{array}}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2}\, stL$$

Nel secondo caso, abbiamo

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_2', A \vdash A^\perp, \Delta_2'}\,\star}{\Gamma_2, A \vdash \Delta_2}\,stL}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2}$$

e bisogna andare a vedere che regola è $\star$. Si noti che, quando la conclusione è del tipo $\Gamma_2', A \vdash A^\perp, \Delta_2'$ non sono state applicate stL or stR su A o $A^\perp$. Quindi $\star$ appartiene a una delle due seguenti classi di regole:

- applicazioni di stL, stR, wL e wR, che non spostano o introducono A e $A^\perp$
- applicazioni di wL or wR che introducono A o $A^\perp$, rispettivamente, o regole per connettivi che introducono A a sinistra o $A^\perp$ a destra.

Per quanto riguarda le regole della prima classe, è conveniente spezzare in due l'applicazione di stL, ottenendo la seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2'', A \vdash A^\perp, \Delta_2''}{\Gamma_2'', A \vdash \Delta_2''}\,stL}{\Gamma_2', A \vdash \Delta_2'}\,\star}{\Gamma_2, A, \vdash \Delta_2}\,stL$$

Ora si può alzare l'applicazione del taglio sopra $\star$ fino alla regola stL più in alto, come si è gia visto per il caso principale dell'induzione, ottenendo:

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_2", A \vdash A^\perp, \Delta_2"}\,\star'}{\Gamma_2", A \vdash \Delta_2"}\,stL}{\Gamma_2", \Gamma_1 \vdash \Delta_2"}\,cutLA$$

dove $\star'$ appartiene alla prima o alla seconda classe.

Supponiamo dunque di essere arrivati a una regola della seconda classe, dopo n passi. Ci sono quattro possibilità:

Se $\star$ è wR, si evita di introdurre $A^\perp$ per indebolimento, in modo da far scomparire l'applicazione di stL immediatamente sotto.

Se $\star$ è wL, cioè se abbiamo:

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2^n \vdash A^\perp, \Delta_2^n}{\Gamma_2^n, A \vdash A^\perp, \Delta_2^n}\,wL(A \cup \overline{\Gamma})}{\Gamma_2^n, A \vdash \Delta_2^n}\,stL}{\Gamma_2^n, \Gamma_1 \vdash \Delta_2^n}\,cutLA$$

si evita wL e si applica il taglio come segue:

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \begin{array}{c}\vdots\ swap\\ A, \Delta_2^{(n+1)} \vdash \Gamma_2^{(n+1)}\end{array}}{\Gamma_1, \Delta_2^{(n+1)} \vdash \Gamma_2^{(n+1)}}\ cutLA$$

e quindi si può applicare di nuovo uno "swap", applicare wL per le formule restanti $\overline{\Gamma}$ e infine stL a Γ_1.

Se $\star$ è una regola unaria o binaria che introduce un connettivo a destra, abbiamo:

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2^n, A \vdash B_i}{\Gamma_2^n, A \vdash A^\perp}\ \circ R}{\Gamma_2^n, A \vdash}\ stL}{\Gamma_2^n, \Gamma_1 \vdash}$$

che si riduce come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2^n, A \vdash B_i}{\Gamma_2^n, \Gamma_1 \vdash B_i}\ cutLA}{\Gamma_2^n, \Gamma_1 \vdash A^\perp}\ \circ R \quad \begin{array}{c}\vdots\ swap\\ A^\perp \vdash \Gamma_1^\perp\end{array}}{\Gamma_2^n, \Gamma_1 \vdash \Gamma_1^\perp}\ cutLA^\perp}{\Gamma_2^n, \Gamma_1 \vdash}\ stL$$

Se $\star$ è una regola unaria o binaria che introduce un connettivo a sinistra, abbiamo:

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \dfrac{\dfrac{B_i \vdash A^\perp, \Delta_2^n}{A \vdash A^\perp, \Delta_2^n}\ \circ L}{A \vdash \Delta_2^n}\ stL}{\Gamma_1 \vdash \Delta_2^n}\ cutLA$$

che si riduce come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \begin{array}{c}\vdots\ swap\\ A, \Delta_2^{n\perp} \vdash B_i^\perp\end{array}}{\Gamma_1, \Delta_2^{n\perp} \vdash B_i^\perp}\ cut1A}{\Gamma_1, \Delta_2^{n\perp} \vdash A^\perp}\ (\circ L)^\perp\\ \vdots\ swap\\ A \vdash \Gamma_1^\perp, \Delta_2^n\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Gamma_1^\perp, \Delta_2^n}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_2^n}\ stL$$

dove $(\circ L)^\perp$ è la regola simmetrica di $\circ L$. □

Nel caso di $\downarrow^\perp$**BS** l'eliminazione del taglio richiede un'ulteriore procedura, permessa dai due lemmi seguenti.

Lemma 2.2.8 *Se il sequente $\Gamma \vdash \downarrow\Delta$ si deriva con una prova senza tagli in $\downarrow^{\perp}$***BS***, esiste una prova senza tagli Π' tale che la seguente sia una derivazione di $\Gamma \vdash \downarrow\Delta$, per un opportuno $\overline{\Gamma}$*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \Pi' \\ \downarrow\Gamma' \vdash \downarrow\Delta\end{array}}{\Gamma \vdash \downarrow\Delta}\ wL(\overline{\Gamma})$$

Dimostrazione. Se $\Gamma \vdash \downarrow\Delta$ è un assioma $\downarrow A \vdash \downarrow A$, siamo già a posto; negli altri casi troveremo Π' e $\overline{\Gamma}$ per induzione sulla derivazione di $\Gamma \vdash \downarrow\Delta$ dalla sua premessa $\Gamma' \vdash \Delta'$.

Se l'ultima regola è $\circ R$, allora $\Gamma_i = \Gamma$, $\downarrow\Delta = \downarrow A$ e dunque $\Delta_i' = \downarrow B_i$; si ottiene così $\Gamma \vdash \downarrow B_i$, che, per ipotesi induttiva, è derivabile come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \Pi' \\ \downarrow\Gamma' \vdash \downarrow B\end{array}}{\Gamma \vdash \downarrow B}\ wL(\overline{\Gamma})$$

Abbiamo allora:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \Pi' \\ \downarrow\Gamma' \vdash \downarrow B\end{array}}{\downarrow\Gamma' \vdash \downarrow B_i}\ \circ R}{\downarrow\Gamma' \vdash \downarrow A}\ wL(\overline{\Gamma})$$

Se l'ultima regola è $\circ L$, allora $\Delta_i' = \downarrow\Delta$, $\Gamma = C$ da cui $\Gamma_i' = D_i$, cosicchè $\Gamma_i' \vdash \Delta_i'$ è $D_i \vdash \downarrow\Delta$. Allora, per ipotesi induttiva, D_i è $\downarrow E_i$ per qualche formula E_i, dove $\downarrow E_i \vdash \downarrow\Delta$ si deriverà con prova senza tagli Π'. Allora Π' seguita da $\circ L$ è ciò che volevamo.

Se l'ultima regola è $\downarrow stR$, allora $\Delta' = \downarrow\Delta''$, dato che esso è incluso in $\downarrow\Delta$, quindi si applica l'ipotesi induttiva, ottenendo la derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \Pi' \\ \downarrow\Gamma'' \vdash \downarrow\Delta''\end{array}}{\downarrow\Gamma' \vdash \downarrow\Delta}\ \downarrow stR}{\Gamma \vdash \downarrow\Delta}\ wL(\overline{\Gamma})$$

Se l'ultima regola è $\downarrow stL$, esiste $\downarrow\Delta''$ tale che $\Delta' = \downarrow\Delta \cup \downarrow\Delta''$, $\Gamma = \Gamma' \cup \downarrow\Delta''^{\perp}$. Si applica quindi l'ipotesi induttiva e si ottiene la derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \Pi' \\ \downarrow\Gamma'' \vdash \downarrow\Delta \cup \downarrow\Delta''\end{array}}{\downarrow\Gamma'' \cup \downarrow\Delta'' \vdash \downarrow\Delta}\ \downarrow stL}{\Gamma \vdash \downarrow\Delta}\ wL(\overline{\Gamma})$$

Se l'ultima regola è $wR(\downarrow\Delta'')$, allora Δ' è $\downarrow\Sigma$ e si ottiene:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Pi'\\ \downarrow\Gamma''\vdash\downarrow\Sigma\end{matrix}}{\downarrow\Gamma'\vdash\downarrow\Delta}\ wR(\downarrow\Delta'')}{\Gamma\vdash\downarrow\Delta}\ wL(\overline{\Gamma})$$

Se l'ultima regola è $wL(\Gamma_1)$, si ottiene

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Pi'\\ \downarrow\Gamma''\vdash\downarrow\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash\downarrow\Delta}\ wL(\Gamma_1\cup\Gamma)$$

□

Di conseguenza vale il seguente lemma:

Lemma 2.2.9 *Ogni derivazione che si conclude così:*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Pi_1\\ \Gamma_1\vdash\downarrow A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\ \Pi_2\\ \downarrow A,\Gamma_2\vdash\Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_2}\ cutL\downarrow A$$

si può trasformare in una derivazione che si conclude così:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Pi_1'\\ \downarrow\Gamma_1'\vdash\downarrow A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\ \Pi_2\\ \downarrow A,\Gamma_2\vdash\Delta_2\end{matrix}}{\downarrow\Gamma_1',\Gamma_2\vdash\Delta_2}\ cutL\downarrow A}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_2}\ wL(\overline{\Gamma})$$

Dimostrazione. Si applica il lemma precedente a Π_1 e quindi si scambia l'applicazione della regola di taglio con l'applicazione di $wL(\overline{\Gamma})$. □

Ora si può provare l'eliminazione del taglio per $\downarrow^{\perp}$**BS**:

Corollario 2.2.10 *Ogni derivazione in* $\downarrow^{\perp}$**BS** *si può trasformare in una derivazione senza tagli.*

Dimostrazione. Per eliminare un taglio che compaia nella seguente forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \Pi_1\\ \Gamma_1\vdash\downarrow A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\ \Pi_2\\ \downarrow A,\Gamma_2\vdash\Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_2}\ cutl\downarrow A$$

si applica il lemma precedente e poi la procedura di eliminazione dei tagli per $^{\perp}$**BS**. □

Capitolo 3

Logiche asimmetriche

Come si è visto nel paragrafo 1.5, si ottengono estensioni della logica di base aggiungendo contesti a sinistra o a destra alle regole di **B**. Si ottengono così i calcoli **BL** e **BR**. Il calcolo **BL** è riassunto in tabella, **BR** è il suo esatto simmetrico, cioè il calcolo le cui regole sono le regole simmetriche a quelle di **BL**. Poiché **BL** non è simmetrico, **BR** è diverso da **BL**; si può però provare su **BR** esattamente ciò che si prova su **BL**, scambiando i connettivi sinistri con quelli destri. Si osservi che esprimere sia **BL** che **BR** è utile per poter poi dare il calcolo **BLR**, che soddisfa tutto ciò che è soddisfatto o in **BL** o in **BR**, mentre **B** soddisfa tutto ciò che è soddisfatto sia in **BL** che in **BR**. In questo modo si ottiene la logica lineare classica come "estremo superiore" di due sistemi intuizionistici, mentre **B** si può concepire come il corrispondente "estremo inferiore". Tutto questo può essere ripetuto anche per i sistemi non lineari **BS**, **BLS**, **BRS**, **BLRS**.

3.1 Il calcolo lineare intuizionista BL

3.1.1 Principi di riflessione per BL

Vogliamo giustificare anche le regole di **BL** per mezzo di principi di riflessione. Possiamo dimostrare che le regole di **BL** corrispondono, nel senso già spiegato nel primo capitolo, alle seguenti equivalenze fra giudizi, ottenute aggiungendo il contesto a sinistra Γ, dove esso non era presente, ai principi di riflessione di **B**. Si vengono così a considerare anche asserzioni del tipo $\Gamma, A \vdash \Delta$, contenenti due parametri. Per il caso delle implicazioni, non considereremo sequenti nidificati, ma le equivalenze valide in **B**, cui si aggiungerà il contesto Γ a sinistra.

Principi di Riflessione per **BL**

$$\Gamma, B, A \vdash \Delta \textit{ se e solo se } \Gamma, B \otimes A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, B \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash A \parr B$$

Tabella 3.1: Calcolo **BL**

Assiomi

$$A \vdash A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ exchL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ exchR$$

Regole operazionali

$$\frac{\Gamma, B, A \vdash \Delta}{\Gamma, B \otimes A \vdash \Delta}\ f \otimes L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A ⅋ B}\ ⅋R$$

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A ⅋ B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ f⅋L \qquad \frac{\Gamma_2 \vdash B \quad \Gamma_1 \vdash A}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash B \otimes A}\ \otimes R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}\ f1L \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \bot}\ \bot R$$

$$\bot \vdash \ \ \bot L \qquad \vdash 1 \ \ 1R$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, B \oplus A \vdash \Delta}\ f \oplus L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ \& R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ f\&L \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B \oplus A} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \oplus A}\ \oplus R$$

$$\Gamma, 0 \vdash \Delta \ \ f0L \qquad \Gamma \vdash \top \ \ \top R$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma, B \leftarrow A \vdash}\ fl{\leftarrow}L \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ fl{\rightarrow}R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta}\ fl{\rightarrow}L \qquad \frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma', A \vdash}{\Gamma, \Gamma' \vdash B \leftarrow A}\ fl{\leftarrow}R$$

$$- - - - \qquad \frac{\Gamma, C \vdash D \quad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma', C \leftarrow B \vdash D \leftarrow A}\ fl{\leftarrow}U$$

Regola di taglio

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ fcut$$

$$\Gamma, B \vdash \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta \; se\ e\ solo\ se\; \Gamma, B{\oplus}A \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B \; se\ e\ solo\ se\; \Gamma \vdash A\&B$$

$$\Gamma, B \vdash A \; se\ e\ solo\ se\; \Gamma, B{\leftarrow}A \vdash \qquad \Gamma, A \vdash B \; se\ e\ solo\ se\; \Gamma \vdash A{\rightarrow}B$$

$$\Gamma \vdash \Delta \; se\ e\ solo\ se\; \Gamma, 1 \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash ; \; se\ e\ solo\ se\; \Gamma \vdash \bot$$

$$\Gamma, A \vdash \Delta \; se\ e\ solo\ se\; \Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, 0 \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash B \; se\ e\ solo\ se\; \Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash \top$$

È immediato verificare che ai principi di riflessione dati sopra corrispondono le regole di formazione di **BL**, cioè:

$$\frac{\Gamma, B, A \vdash \Delta}{\Gamma, B \otimes A \vdash \Delta}\, f \otimes L \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, B \oplus A \vdash \Delta}\, f \oplus L \qquad \frac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma, B{\leftarrow}A \vdash}\, fl{\leftarrow}L$$

$$\Gamma, 0 \vdash \Delta \;\; f0L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}\, f1L$$

per la logica del falso, e

$$\frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A \parr B}\, \parr R \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}\, \&R \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A{\rightarrow}B}\, fl{\rightarrow}R$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \bot}\, \bot R \qquad \Gamma \vdash \top \;\; \top R$$

per la logica del vero.

Per quanto riguarda le regole di riflessione, la presenza di uno o due parametri non fa differenza, come vediamo nel seguente lemma, che è enunciato su schemi contenenti la variabile $\cdot$ per il segno e le variabili $\circ_V$ e $\circ_F$ per i corrispondenti connettivi. L'istanziazione precisa di tali variabili è però possibile solo nel caso dei segni "," e ";", lasciamo aperto il problema nel caso delle implicazioni.

Lemma 3.1.1 *Sono equivalenti:*

- *Le regole di riflessione a un parametro*

$$\frac{A \circ_F B \vdash \Delta}{A \cdot B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \circ_V B}{\Gamma \vdash A \cdot B}$$

- *Gli assiomi di riflessione*

$$A \cdot B \vdash A \circ_F B \qquad A \circ_V B \vdash A \cdot B$$

- *Le regole di riflessione a due parametri*

$$\frac{\Gamma, A \circ_F B \vdash \Delta}{\Gamma, A \cdot B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \circ_V B, \Delta}{\Gamma \vdash A \cdot B, \Delta}$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare l'equivalenza delle ultime due, dato che l'equivalenza delle prime due è stata già provata in 1.2.1 e 1.2.2. Supponiamo che siano validi gli assiomi di riflessione, allora le regole di riflessione a due parametri si derivano come segue:

$$\frac{A \cdot B \vdash A \circ_F B \quad \Gamma, A \circ_F B \vdash \Delta}{\Gamma, A \cdot B \vdash \Delta} \, cutL \qquad \frac{\Gamma \vdash A \circ_V B, \Delta \quad A \circ_V B \vdash A \cdot B}{\Gamma \vdash A \cdot B, \Delta} \, cutR$$

Viceversa, si ottengono le seguenti derivazioni degli assiomi di riflessione:

$$\frac{A \circ_F B \vdash A \circ_F B}{A \cdot B \vdash A \circ_F B} \qquad \frac{A \circ_V B \vdash A \circ_V B}{A \circ_V B \vdash A \cdot B}$$

$\square$

Si dimostra lo stesso lemma per il caso delle regole di riflessione per le costanti 0-arie del linguaggio

Lemma 3.1.2 *Sono equivalenti:*

- *Le regole di riflessione a un parametro*

$$\frac{\vdash \Delta}{1 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash}$$

- *Gli assiomi di riflessione*

$$\vdash 1 \qquad \bot \vdash$$

- *Le regole di riflessione a due parametri*

$$\frac{\Gamma, 1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Dimostrazione. Se vale l' assioma $\vdash 1$, da $\Gamma, 1 \vdash \Delta$ si ricava $\Gamma \vdash \Delta$ per taglio. Viceversa, dall'assioma $1 \vdash 1$ si ricava l'assioma di riflessione $\vdash 1$. Il caso di $\bot$ si discute in modo simmetrico. $\square$

Questo lemma spiega allora perchè le regole $1R$ e $\bot\ L$ di **BL** siano semplicemente $\vdash 1$ e $\bot\vdash$, senza aggiunta di contesto a sinistra: esse, in quanto assiomi di riflessione, rimangono invariate, indipendentemente dal numero di parametri presenti nel principio di riflessione corrispondente.

Proseguendo nel lavoro di giustificazione delle regole di **BL** attraverso principi di riflessione, ricordiamo che, come si è visto, in 1.3.1, al principio

$$\Gamma, A \vdash B \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash A \to B$$

corrisponde la seguente regola di riflessione

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

che a sua volta, come notato nel paragrafo 1.5, equivale alla sua forma completa a sinistra

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \to B \vdash \Delta}\ fl{\to}L$$

cioè la regola di **BL**. Notiamo ora che i principi di riflessione per **BL**, contenendo, in alcuni casi, il parametro aggiuntivo Γ, permettono di considerare giudizi della forma $\Gamma \vdash \Delta$, dove sia Γ che Δ contengono più di una formula. Tali sequenti saranno derivabili con le regole di **BL**. Ad esempio abbiamo la derivazione

$$\frac{C \vdash C \qquad \dfrac{B \vdash B \quad A \vdash A}{B ⅋ A \vdash B, A}\ ⅋L}{C, C \to B ⅋ A \vdash B, A}\ {\to}L$$

in cui l'unica differenza, sostanziale, rispetto alle regole di **B** è la presenza di contesto a sinistra nella premessa sinistra della regola $\to L$.

A differenza del caso di **B**, la regola di taglio completa:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ fcut$$

(ottenuta aggiungendo contesto a sinistra al taglio $cutL$ di **B**), è eliminabile, come viene dimostrato in [BFS] e si può vedere in Appendice. Dunque tale regola si deve considerare valida in **BL**. La useremo per l'ulteriore discussione dei principi di riflessione.

Proposizione 3.1.3 *Se è valida la regola di taglio completa, le regole di riflessione per i connettivi moltiplicativi* $\otimes$ *e* ⅋

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B}\ \otimes R \qquad \frac{A \vdash \Delta_1 \quad B \vdash \Delta_2}{A ⅋ B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ ⅋L$$

sono equivalenti alle loro forme complete

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B, \Delta_1, \Delta_2}\ f\otimes R \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A ⅋ B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ f⅋L$$

Dimostrazione. Vale la seguente derivazione:

$$\dfrac{\Gamma_2 \vdash B, \Delta_2 \qquad \dfrac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \qquad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A, B \vdash A \otimes B}}{\Gamma_1, B \vdash A \otimes B, \Delta_1}\, fcut}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B, \Delta_1, \Delta_2}\, fcut$$

e la simmetrica nel caso di $\parr$. $\square$

L'equivalenza delle regole di riflessione con la loro forma completa vale anche per per i connettivi additivi, come si è già visto nel caso di **B**, con la proposizione 1.4.4. La scelta fatta in **BL** è quella di prendere le forme complete nel caso di $\parr L$, $\& L$, e quelle visibili nel caso di $\otimes R$, $\oplus R$. Come abbiamo appena detto, anche altre scelte sarebbero compatibili con i principi di riflessione per **BL**: la scelta "aggiungere i contesti a sinistra", con cui si ottengono le regole di **BL**, è quella che permette di applicare la procedura di eliminazione del taglio data in [BFS].

3.1.2 I connettivi lineari intuizionisti

Torniamo alle regole di formazione dei connettivi. Come abbiamo visto nella proposizione 1.4.3, esse non sono equivalenti alle loro forme complete. Solo il fatto di modificare i principi di riflessione aggiungendo un ulteriore parametro permette di ottenere un'altra forma per esse. Nel caso di **BL**, i principi di riflessione vengono aggiornati nel caso dei connettivi sinistri $\otimes$ e $\oplus$, rimangono quelli di **B** nel caso dei connettivi destri $\parr$ e $\&$. Le regole di formazione $\parr R$ e $\& R$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A \parr B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}$$

sono quindi intrinsecamente limitate a destra anche in **BL**, esattamente come la regola di formazione $\rightarrow R$ di **BL**

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

che è la regola dell'implicazione intuizionista, è intrinsecamente limitata a destra. In questo senso, il connettivo $\parr$ di **BL** è la disgiunzione moltiplicativa intuizionista e il connettivo $\&$ di **BL** è la congiunzione additiva intuizionista. Essi hanno, in **BL**, un comportamento non simmetrico rispetto a quello dei connettivi $\otimes$ e $\oplus$. In particolare, sempre per la proposizione 1.4.3, la proprietà associativa di $\otimes$ e la proprietà distributiva di $\otimes$ rispetto a $\oplus$ sono derivabili in **BL**, mentre non lo sono la proprietà associativa di $\parr$ e la distributiva di $\parr$ rispetto a $\&$.

3.2 Il calcolo intuizionista BLS

Come abbiamo già osservato nel secondo capitolo, per il caso del sistema **BS**, le regole strutturali rendono equivalenti la formulazione additiva e moltiplicativa delle regole. In questo modo i connettivi sinistri & ed $\parr$ ereditano le proprietà dei connettivi destri $\otimes$ e $\oplus$. In particolare, è derivabile la forma completa della regola $\& R$, come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}\,wL \qquad \dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B}\,wL}{A, B \vdash A \& B}\,\& L}{\Gamma, B \vdash A \& B, \Delta}\,fcut}{\Gamma, \Gamma \vdash A \& B, \Delta, \Delta}\,fcut}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\,c$$

La derivazione non è altro che la simulazione della regola completa moltiplicativa tramite la regola additiva, $fcut$, indebolimento e contrazione. Allo stesso modo, anche la forma completa della regola $\parr R$ è derivabile dalla forma completa della regola additiva $f \oplus R$, indebolimento e contrazione, come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A, A \oplus B, \Delta}\,f \oplus R}{\Gamma \vdash A \oplus B, A \oplus B, \Delta}\,f \oplus R}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}\,c \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash A, B}\,wR}{A \vdash A \parr B}\,\parr R \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{B \vdash A, B}\,wR}{B \vdash A \parr B}\,\parr R}{A \oplus B \vdash A \parr B}\,\oplus L}{\Gamma \vdash A \parr B, \Delta}\,cut$$

ricordando che $f \oplus R$ è valida in **B**.

Dalla prima delle due derivazioni date sopra si può vedere che la proprietà distributiva di $\parr$ rispetto a & è derivabile in **BLS**: basta porre Γ uguale a $(B \parr C) \& (A \parr C)$ e Δ uguale a C per derivare $(B \parr C) \& (A \parr C) \vdash (A \& B) \parr C$, cioè il verso della distributiva non derivabile né in **B** né in **BL** (cf. la 1.4.3). Dalla seconda delle due si può anche facilmente vedere che la proprietà associativa di $\parr$, che non vale in **B** (cf. la 1.4.3), è ugualmente derivabile in **BLS**.

Come già osservato nel caso di **BS**, il fatto che le regole moltiplicative ed additive siano equivalenti identifica $\otimes$ con &, $\parr$ con $\oplus$. Conviene avere quindi un sistema con una sola congiunzione e una sola disgiunzione, denotate rispettivamente da & e da $\vee$, che viene riportato in tabella. In tale sistema, come abbiamo visto, sono derivabili le forme complete per le regole a destra di entrambi i connettivi, ottenendo così il sistema di Dummett per un calcolo intuizionista con contesti a destra (cf. [D77]). Sono derivabili inoltre sia il sequente $A \& (B \vee C) \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$, sia il sequente $(B \vee C) \& (A \vee C) \vdash (A \& B) \vee C$, quindi entrambe le distributive. Congiunzione e disgiunzione vengono così ad avere un comportamento simmetrico l'una rispetto all'altra, anche se il sistema **BLS** è asimmetrico. Ciò è dovuto alle regole strutturali. Il connettivo $\rightarrow$, al contrario, mantiene il comportamento intuizionista di **BL**, e non

Tabella 3.2: Calcolo **BLS**

Assiomi

$$A \vdash A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ exchL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ exchR$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ wL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \Delta}{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Delta}\ wR$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ cL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Sigma, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta', \Sigma, \Delta}\ cR$$

Regole operazionali

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, B \vee A \vdash \Delta}\ f \oplus L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ \& R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ f\& L \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B \vee A} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A}\ \oplus R$$

$$\Gamma, 0 \vdash \Delta\ f0L \qquad \Gamma \vdash \top\ \top R$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma, B \leftarrow A \vdash}\ fl{\leftarrow}L \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ fl{\rightarrow}R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta}\ fl{\rightarrow}L \qquad \frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma', A \vdash}{\Gamma, \Gamma' \vdash B \leftarrow A}\ fl{\leftarrow}R$$

$$----- \qquad \frac{\Gamma, C \vdash D \quad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma', C \leftarrow B \vdash D \leftarrow A}\ fl{\leftarrow}U$$

Regola di taglio

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ fcut$$

è simmetrico al connettivo $\leftarrow$. Questa situazione rispecchia quello che avviene negli spazi topologici. L'idea è che **BLS**, con implicazione data da $\rightarrow$, sia la logica degli aperti, mentre **BRS**, con implicazione data da $\leftarrow$, sia la logica dei chiusi. Nei frame degli aperti e nei coframe dei chiusi, al finito, entrambe le distributive sono derivabili, mentre una sola, quella che permette di definire l'implicazione intuizionista, lo è nel caso infinitario. In questo senso, eliminare le regole di indebolimento e contrazione permette di dire al finito, con i sequenti, ciò che altrimenti si direbbe solo nel caso infinitario.

Appendice A

Visibilità ed eliminazione dei tagli

In questa appendice viene riportata la procedura di eliminazione dei tagli per **B** e per le sue estensioni, insieme alle definizioni necessarie. Le definizioni e la procedura sono state elaborate da da C. Faggian e G. Sambin e fanno parte del lavoro [BFS]. Non si riportano qui la definizione di visibilità e l'esempio successivo, che sono dovuti agli stessi autori, perchè già contenuti nel paragrafo 1.4.2.

Vedremo ora come la proprietà di visibilità si trasformi immediatamente nell'eliminazione dei tagli.

La visibilità è determinante per la forma e la struttura delle derivazioni. Questo fatto, espresso dal lemma di sostituzione e dal lemma "della storia" che seguiranno, verrà utilizzato nella procedura di eliminazione dei tagli. Prima, è utile introdurre la seguente definizione di occorrenza legata.

Occorrenze legate. Informalmente, quando un'occorrenza di una formula *è la stessa* in due sequenti consecutivi, diciamo che due occorrenze sono *legate*.

Piú formalmente, l'occorrenza di una formula che sia introdotta da una regola o da un assioma, non è legata ad alcuna occorrenza di formula sopra. Due occorrenze della stessa formula si dicono legate quando esse sono nello stesso posto nelle liste di formule che nella descrizione delle regole sono denotate dalla stessa lettera nelle premesse e nella conclusione (ad es. Γ_1 nella conclusione e Γ_1 nelle premesse). Si noti che di conseguenza: *i.* nelle regole additive a due premesse le occorrenze di formule in Γ_1 nella conclusione sono legate a quelle nello stesso luogo in Γ_1 di entrambe le premesse; *ii.* La regola di contrazione identifica due occorrenze di A in una sola, che risulta legata ad entrambe le occorrenze da cui proviene.

Sostituzione. L'applicabilità di una regola e il suo risultato sulle formule attive è insensibile al contesto passivo. Cioè, data l'applicazione di una regola con conclusione $\Gamma \vdash \Delta$, dove Γ è passivo e M è un'occorrenza in Γ, se nelle premesse le occorrenze legate a M sono sostituite da una lista di formule Σ, allora si può applicare la stessa regola, che fornisce $\Gamma(\Sigma/M) \vdash \Delta$ come conclusione. La scrittura $\Gamma(\Sigma/M)$ sta per la lista ottenuta da Γ sostituendo l'occorrenza M con la lista Σ.

L'insensibilità delle regole alle sostituzioni si estende immediatamente ai sottoalberi di derivazione (cf. [T] o [Gir] per la definizione). Se Π è un sottoalbero di derivazione e M una occorrenza di formula che appare in uno dei sequenti di Π, scriviamo $\Pi(M/\Sigma)$ per il risultato della sostituzione, in ogni sequente, delle occorrenze legate di M con la lista Σ. Inoltre, nel seguito, useremo l'espressione "a sinistra" per abbreviare "alla sinistra dei sequenti" nella derivazione (o nel sottoalbero di derivazione).

Lemma A.0.1 (Sostituzione dell'occorrenza di una formula) *Sia Π un sottoalbero di derivazione in cui le sole regole applicate sono o regole con contesto passivo a sinistra o regole strutturali (i. e. solo scambio in **B**, anche indebolimento e contrazione in **BS**).*

Sia M una qualsiasi occorrenza di formula a sinistra. Allora, per ogni lista di formule Σ, il risultato della sostituzione Σ/M in Π è ancora un sottoalbero di derivazione. Se Π si conclude con $\Gamma \vdash \Delta$ (dunque deve essere $M \in \Gamma$), allora $\Pi(\Sigma/M)$ si conclude con $\Gamma(\Sigma/M) \vdash \Delta$.

l'enunciato simmetrico vale per M a destra.

Si noti che una delle ragioni per considerare una forma di indebolimento e contrazione in cui si considerano liste (al posto di formule, come si fa di solito), è per poter enunciare il piú semplicemente possibile il lemma precedente.

Storia di un'occorrenza di formula. Un *cammino* in una derivazione Π è una successione di sequenti consecutivi, dalla radice (conclusione) alle foglie (assiomi). Definiamo un *thread* di un'occorrenza di formula M come la porzione di cammino formata da tutti i sequenti consecutivi che contengono occorrenze legate di M.

Definizione A.0.2 (Storia di M.) *Se M è un'occorrenza di formula, la Storia di M in Π è il minimo sottoalbero di derivazione $\Pi|M$ che contiene tutte le occorrenze legate di M, o equivalentemente tutti i thread di quell'occorrenza.*

Se Π è una derivazione senza tagli con conclusione $\Gamma, M \vdash \Delta$, andare all'insú fino a dove M viene introdotta è lo stesso che considerare la sua storia.

Lemma A.0.3 (Storia di un'occorrenza di formula in B e BS.) *se Π è una derivazione senza tagli in **B** o **BS**, M è un'occorrenza di formula a sinistra nella conclusione, allora: (I) la storia $\Pi|M$ di M in Π consiste di sole regole operazionali senza restrizioni la contesto sinistro oppure di regole strutturali (solo scambio in **B**,* *anche indebolimento e contrazione in* **BS***); (II) ogni occorrenza di M nelle foglie di* $\Pi(M)$ *è:*

(a) visibile: $M \vdash \Delta'$ *per qualche* Δ'*, oppure*

(b) parte del contesto passivo di $\top R$*:* $\Gamma' \vdash \top$ *per qualche* Γ' *contenente* M*, oppure*

(c) introdotta per wL*:* $\Gamma', \Sigma \vdash \Delta'$ *with* M *in* Σ*. A destra vale l'enunciato simmetrico.*

Dimostrazione. **(I)** Essendo M presente a sinistra, è nel contesto sinistro. Dunque per visibilità non è possibile applicare una regola con formule attive a sinistra (salvo su M stessa, ma all'ra l'applicazione ha M come formula principale, e non è nella storia di M). **(II)** Quando M è introdotta da una regola, non ha contesto essendo la formula attiva. Quando M è introdotta da un assioma, $\top R$ è il solo assioma con contesto a sinistra. □

A.0.1 Eliminazione del taglio in logica di base B e logica di base strutturata BS

Rivediamo alcune definizioni. Il *rango* di un'occorrenza di formula M in un sequente di una derivazione è il massimo fra le lunghezze dei thread di tale occorrenza, e cioè l'altezza della storia di M. Il rango destro (R-ρ) di un taglio è il rango della formula tagliata nella premessa destra del taglio. Lo stesso per il rango sinistro L-ρ. Il rango ρ di un taglio è la somma di rango destro e rango sinistro. Il *grado* di un taglio è il grado della formula tagliata, e cioè il numero dei suoi connettivi.

Il teorema di eliminazione del taglio in **B** si ottiene come in Gentzen dalla seguente:

Proposizione A.0.4 *Una derivazione* Π *in* **B** *con un'applicazione del taglio come ultima inferenza, e nessun'altra applicazione del taglio, si puó trasformare in una derivazione con la stessa conclusione e senza tagli.*

Tale derivazione Π in **B** è della forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\Pi_1\\ \Sigma \vdash M\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\Pi_2\\ \Gamma, M \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta}\, cutL \qquad or \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\Pi_1\\ \Sigma \vdash M, \Lambda\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\Pi_2\\ M \vdash \Delta\end{matrix}}{\Sigma \vdash \Delta, \Lambda}\, cutR$$

La procedura di eliminazione del taglio consiste nell'applicare due passi.

Riduzione del rango: La derivazione si trasforma immediatamente in una (con la stessa conclusione) in cui i tagli si fanno solo su formule principali (allora il rango è 2), e della forma:

$$\dfrac{\Sigma' \vdash M \quad M \vdash \Delta'}{\Sigma' \vdash \Delta'}\, cut$$

Riduzione del grado: quando $\rho = 2$, i tagli si riducono a tagli di grado minore.

Riduzione del rango È sufficiente provare un solo lemma, che mostra come il rango destro di un'applicazione di $cutL$ si riduce a 1. Infatti, l'enunciato che dice che $cutR$ si riduce a 1 vale poi per simmetria. Dunque, il rango di ogni $cutL$ si riduce a 2 in due passi: (1) il rango destro si riduce a 1 per applicazione del lemma;

allora i tagli hanno la forma:

$$\frac{\Sigma \vdash M \quad M \vdash \Delta'}{\Sigma \vdash \Delta'}\ cut$$

cioè M è visibile anche nella premessa destra (dato che il rango destro è 1, M deve essere principale), e dunque si puó procedere con il secondo passo:

(2) si trattano di nuovo i tagli ottenuti al passo 1 considerandoli ora come casi particolari di $cutR$, con contesto vuoto, e si procede applicando il lemma, nella sua forma simmetrica, per ridurre anche il rango sinistro a 1.

La riduzione di rango di $cutR$ è naturalmente duale alla precedente. Allora, si deve solo provare che:

Lemma A.0.5 (Riduzione a 1 del rango destro di cutL) *La derivazione* Π *si trasforma immediatamente in una con la stessa conclusione, ma in cui la formula tagliata* M *è principale (e dunque visibile) nella premessa destra.*

Dimostrazione. L' idea è che è sufficiente sollevare in un solo passo il taglio (con $\Sigma \vdash M$ come premessa sinistra) fino a dove M è principale nella premessa destra (che dunque è $M \vdash \Delta'$, senza contesto). Questo è immediato, usando la storia della formula da tagliare e il lemma di sostituzione.

Seguire la derivazione della premessa destra fino a dove M è principale è lo stesso che considerare le fogle della storia di M. Distinguiamo allora i casi descritti nel lemma A.0.3,II:

caso (a) Applichiamo il taglio a tutte le foglie $M \vdash \Delta'$ aggiungendo $\Sigma \vdash M$ come premessa sinistra. Otteniamo così:

$$\frac{\Sigma \vdash M \quad M \vdash \Delta'}{\Sigma \vdash \Delta'}\ cut$$

Questo dà esattamente lo stesso risultato della sostituzione di M con Σ nelle foglie ($M \vdash \Delta'$ diventa $\Sigma \vdash \Delta'$); *caso (b)* Sostituiamo $\Gamma' \vdash \top$ con l'assioma $\Gamma'(\Sigma/M) \vdash \top$.

Per i lemmi A.0.3,I e A.0.1, si puó operare la sostituzione M/Σ su $\Pi|M$, ottenendo cosìil sottoalbero di derivazione $\Pi(\Sigma/M)$ con conclusione $\Gamma, \Sigma \vdash \Delta$. $\square$

Riduzione del grado In (1) si mostra che se una delle premesse del taglio è un assioma, allora il taglio si elimina; in (2) si mostra che se entrambe le premesse del taglio sono il risultato di una regola di introduzione, la derivazione si trasforma in una di grado minore (con la stessa conclusione).

(1) L'assioma è premessa sinistra. Dato che il rango è 2, la formula tagliata ha rango 1 anche nella premessa destra del taglio, e dunque essa è formula principale o assioma. Il caso in cui la formula da tagliare appartiene al contesto passivo di $\top R$ è già stato esaminato.

(a) $M \vdash M$:

$$\dfrac{M \vdash M \quad \begin{array}{c}\vdots\\ M, \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{M, \Gamma \vdash \Delta}\, cutL \qquad \text{diventa} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ M, \Gamma \vdash \Delta\end{array}$$

(b) $0 \vdash \Delta$:

$$\dfrac{0 \vdash M, \Delta \quad M \vdash \Delta'}{0 \vdash \Delta, \Delta'} \qquad \text{diventa} \qquad 0 \vdash \Delta, \Delta'$$

(c) $\vdash 1$: 1 si puó introdurre a destra solo con $1 \vdash 1$ (simmetrico di (a)), o $1L$:

$$\dfrac{\vdash 1 \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash \Delta\end{array}}{1 \vdash \Delta}\, 1L}{\vdash \Delta}\, cutL \qquad \text{diventa} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \vdash \Delta.\end{array}$$

(d) $\Gamma \vdash \top$: $\top$ si puó introdurre a destra solo con $\top \vdash \top$ (simmetrico di (b)).

Se l'assioma è premessa destra del taglio, vale l'argomentazione simmetrica.

(2) La derivazione ha la forma

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M}\, \circ R \quad \dfrac{\vdots}{M \vdash \Delta}\, \circ L}{\Gamma \vdash \Delta}\, cut$$

dove M è principale in entrambe le premesse del taglio; il grado si abbassa con le seguenti riduzioni.

(a) connettivo $\otimes$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B}\, \otimes R \quad \dfrac{A, B \vdash \Delta}{A \otimes B \vdash \Delta}\, \otimes L}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\, cut \qquad \text{diventa} \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash B \quad \dfrac{\Gamma \vdash A \quad A, B \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta}\, cutL}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\, cutL$$

(a') connettivo $\parr$: simmetrico di (a)

(b) connettivo &:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash A \quad \Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\&B}\,\&R \qquad \dfrac{A\vdash\Delta}{A\&B\vdash\Delta}\,\&L}{\Gamma\vdash\Delta}\,cut \qquad \text{diventa} \qquad \dfrac{\Gamma\vdash A \quad A\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\Delta}\,cut$$

(b') connettivo $\oplus$: simmetrico di (b)

(c) connettivo $\rightarrow$: sono possibili quattro casi:

$(\rightarrow Uni$-$\rightarrow Uni)$

$$\dfrac{\dfrac{A\vdash B \quad C\vdash D}{B\rightarrow C\vdash A\rightarrow D}\,\rightarrow U \qquad \dfrac{E\vdash A \quad D\vdash F}{A\rightarrow D\vdash E\rightarrow F}\,\rightarrow U}{B\rightarrow C\vdash E\rightarrow F}\,cut \qquad \text{diventa} \qquad \dfrac{\dfrac{E\vdash A \quad A\vdash B}{E\vdash B}\,cut \qquad \dfrac{C\vdash D \quad D\vdash F}{C\vdash F}\,cut}{B\rightarrow C\vdash E\rightarrow F}\,\rightarrow U$$

$(\rightarrow Uni$-$\rightarrow L)$

$$\dfrac{\dfrac{A\vdash B \quad C\vdash D}{B\rightarrow C\vdash A\rightarrow D}\,\rightarrow U \qquad \dfrac{\vdash A \quad D\vdash\Delta}{A\rightarrow D\vdash\Delta}\,\rightarrow L}{B\rightarrow C\vdash\Delta}\,cut \qquad \text{diventa} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash A \quad A\vdash B}{\vdash B}\,cut \qquad \dfrac{C\vdash D \quad D\vdash\Delta}{C\vdash\Delta}\,cut}{B\rightarrow C\vdash\Delta}\,\rightarrow L$$

$(\rightarrow R$-$\rightarrow Uni)$

$$\dfrac{\dfrac{B\vdash C}{\vdash B\rightarrow C}\,\rightarrow R \qquad \dfrac{A\vdash B \quad C\vdash D}{B\rightarrow C\vdash A\rightarrow D}\,\rightarrow U}{\vdash A\rightarrow D}\,cut \qquad \text{diventa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\vdash B \quad B\vdash C}{A\vdash C}\,cut \qquad C\vdash D}{A\vdash D}\,cut}{\vdash A\rightarrow D}\,\rightarrow R$$

$(\rightarrow R$-$\rightarrow L)$

$$\dfrac{\dfrac{A\vdash B}{\vdash A\rightarrow B}\,\rightarrow R \qquad \dfrac{\vdash A \quad B\vdash\Delta}{A\rightarrow B\vdash\Delta}\,\rightarrow L}{\vdash\Delta}\,cut \qquad \text{diventa} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash A \quad A\vdash B}{\vdash B}\,cut \qquad B\vdash\Delta}{\vdash\Delta}\,cut$$

(c') connettivo $\leftarrow$: simmetrico di $\rightarrow$

Eliminazione del taglio in logica di base strutturata BS

La procedura precedente si puó facilmente modificare per provare l'eliminazione del taglio per il sistema **BS**. Tuttavia, per il lemma A.0.3, rimane ancora da considerare, per le foglie della storia di M, solo il caso (c). Naturalmente, si deve sostituire l'applicazione di un'indebolimento che introduce M con uno che introduce Σ. Ora, anche il caso di indebolimento e contrazione è (automaticamente) considerato. Infatti, si noti che la sostituzione Σ/M in Π, significa ora che un indebolimento che introduce M diventa un indebolimento che intorduce Σ, e lo stesso per la contrazione.

A.0.2 Eliminazione del taglio nelle estensioni della logica di base

Vediamo ora come si applica la procedura di eliminazione del taglio alle altre estensioni di **B** [1]. È sufficiente considerare solo le estensioni di **B** ottenute liberalizzando il contesto a sinistra, cioè **BL** e **BLS**. Infatti, argomentando per simmetria, ciò si applica automaticamente anche alle logiche simmetriche **BR** e **BRS**, rispettivamente.

La visibilità è conservata a destra, sia in **BL** che in **BLS**. Quindi a destra la struttura di assiomi e regole, e quindi le derivazioni, rimangono le stesse che in **B** e **BS**; in particolare, il lemma della storia di un'occorrenza di formula a destra continua a valere, esattamente come per **B** e **BS**. Anche il lemma di sostituzione vale, o meglio, si puó rafforzare estendendolo al caso di sostituzione quando il contesto a sinistra è presente, come segue. Con la scrittura $M/\Sigma\text{-}\Lambda$ intendiamo la sostituzione che rimpiazza l'occorrenza di formula M con Λ e che aggiunge Σ alla sinistra del sequente: così $\Gamma \vdash \Delta(M)$ diventa $\Gamma, \Sigma \vdash \Delta(\Lambda)$.

Lemma A.0.6 (Sostituzione di un'occorrenza di formula a destra, in BL e BLS) *Sia Π un sottoalbero di derivazione in cui le sole regole applicate sono o regole per connettivi che non operano a destra o regole strutturali. Sia M una qualsiasi occorrenza di formula a destra. Allora, per ogni lista di formule Λ e Σ, il risultato della sostituzione $M/\Sigma\text{-}\Lambda$ in Π è di nuovo un sottoalbero di derivazione.*

Se Π si conclude con $\Gamma \vdash \Delta$, allora $\Pi(M/\Sigma\text{-}\Lambda)$ si conclude con $\Gamma, \Sigma \vdash \Delta(M/\Lambda)$.

BL (e **BLS**) ammettono l'eliminazione della regola di taglio completa ($fcut$). Il punto fondamentale è ridurre il problema alla eliminazione di $cutL$, cioè di un taglio con contesto a sinistra. Infatti, come in **B** e in **BS** si è ridotta l'eliminazione dei tagli all'eliminazione dei tagli senza contesto, nelle estensioni a sinistra si puó ridurre il problema all'eliminazione dei tagli a sinistra, cioè $cutL$. Quindi, per storia e sostituzione di un'occorrenza di formula a destra, abbiamo che

Lemma A.0.7 (Riduzione del rango destro a 1 in BL e BLS) *Una derivazione Π in* **BL** *e* **BLS** *con un taglio come ultima regola, e senza altri tagli, si trasforma immediatamente in una derivazione con la stessa conclusione, ma in cui l'applicazione del taglio ha la forma*

$$\frac{\Gamma' \vdash M \quad \Sigma, M \vdash \Lambda}{\Gamma', \Sigma \vdash \Lambda}\, cutL$$

dove M è principale nella premessa sinistra.

[1] **BLR** e **BLRS** hanno la formulazione usuale -a due parti- della logica classica e lineare, e quindi l'usuale cut-elimination.

Proposizione A.0.8 *Una derivazione in* **BL** *e* **BLS** *che si concluda con un taglio, e senza altri tagli, si puó trasformare in una derivazione con la stessa conclusione e senza tagli.*

Cenno di dimostrazione. La prova è per induzione sul grado e sul rango (destro). Se ρ è il rango, si distinguono due casi:

($\rho = \mathbf{2}$) Se una delle premesse del taglio è un assioma, il taglio si elimina; se entrambe le premesse del taglio sono il risultato di una regola per i connettivi, riducendo il grado, il taglio si elimina per induzione.

($\rho > \mathbf{2}$) Per prima cosa, se il rango sinistro è L-$\rho > 1$, la derivazione si trasforma in una derivazione con la stessa conclusione e L-$\rho = 1$. Con la riduzione appena vista.

Ora i tagli ancora ad eliminare sono solo $cutL$, con L-$\rho = 1$. Assumendo che l'eliminazione del taglio si possa fare per lo stesso grado e rango minore, la derivazione si trasforma in una con la stessa conclusione ma con rango destro minore. Procediamo al solito modo (stile Gentzen), alzando $\Gamma' \vdash M$, la premessa sinistra del taglio, lungo il ramo destro: il taglio si solleva, e sotto si applica la regola. Ciò è sempre possibile, dato che alzare $cutL$ alle premesse della regola lascia inalterata la parte destra, e l'effetto è una sostituzione M/Γ' che agisce solo a sinistra, dove la regola ha contesto libero.

□

Bibliografia

[A] ABRUSCI V.M., Phase semantics and sequent calculus for pure noncommutative classical linear propositional logic, *J. Symbolic Logic*, **56** (1991) 1403–1451.

[B] BATTILOTTI G., From basic logic to full intuitionistic linear logic, *in preparazione.*

[BFS] BATTILOTTI G., FAGGIAN C., SAMBIN G., Basic Logic: Reflection, symmetry, visibility, *Preprint no. 45 del Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Padova, Dicembre 1996.*

[BS0] BATTILOTTI G., SAMBIN G., Un cubo di logiche estensionali, *Dattiloscritto, presentato al Workshop Italiano di logica lineare di Monselice, ottobre '94.*

[BS] BATTILOTTI G., SAMBIN G., Basic logic and the cube of its extensions, apparirà come selected paper in *Proceedings of the International Conference on "Logic, Methodology and Philosophy of Science"* (Firenze, agosto '95).

[BS-t] BATTILOTTI G., SAMBIN G. Embedding classical logic into full basic orthologic, *in preparazione.*

[BS-pr] BATTILOTTI G., SAMBIN G., Pretopologies and a uniform presentation of sup-lattices, quantales and frames, *in preparazione.*

[Bell] BELL J., Orthologic, Forcing, and the manifestation of attributes, In *"Southeast asian Conference on Logic"*, (C. T. Chong and M. J. Wicks eds.) North-Holland (1983), 13–36.

[BeH] BELL J., HALLETT M., Logic, Quantum Logic and Empiricism, *Philosophy of Science* **49**, 1982, 355-379.

[B94] BELL J., Lettera a Giovanni Sambin, comunicazione privata, marzo 1994.

[Be] BELNAP N.D. jr, Display logic, *Journal of Philosophical Logic* **11** (1982), 375-417.

[CL] COOKE R.M., Van LAMBALGEN M., The representation of Takeuti's Π-operator, *Studia Logica*, **42**, 1983.

[CG] CUTLAND N.J., GIBBINS P.F., A regular Sequent Calculus for Quantum Logic in which & and $\oplus$ are dual, *Logique et Analyse - Nouvelle Serie -* **25**, 1982, 221–248.

[DCG] DALLA CHIARA M.L., GIUNTINI R., Paraconsistent Quantum Logics, *Foundations of Physics* **19** (1989), 891–904.

[DCG2] CATTANEO G., DALLA CHIARA M.L., GIUNTINI R., Fuzzy intuitionistic Quantum Logics, *Studia Logica* **52** (1993), 419-444.

[D76] DUMMETT M., *"Introduction to quantum logic"*, Manuscript, 1976?.

[D77] DUMMETT M., *"Elements of Intuitionism"*, Clarendon Press, Oxford (1977).

[F0] FAGGIAN C., Teoremi di eliminazione del taglio in basic logic e in logiche quantistiche, *Tesi di laurea, Università di Padova* (1996).

[F] FAGGIAN C., A cut-free calculus for orthologic and basic orthologic, *in preparazione*.

[FS] FAGGIAN C., SAMBIN G. From basic logic to quantum logics with cut-elimination, Proceedings of the International Quantum Structures Association (Berlin, 96). International Journal of Theoretical Physics *submitted*.

[FS2] FAGGIAN C., SAMBIN G. Visibility and modular cut-elimination: from basic to quantum, linear and classical logic, *in preparazione*.

[G] GENTZEN G., Untersuchungen über das logische Schliessen, *Mathematische Zeitschrift* **39** (1935), 176–210; English translation in *"The collected papers of Gerhard Gentzen"*, (M.E. Szabo ed.) North-Holland (1969),pag. 68–131.

[Gi] GIRARD J-Y., Linear Logic, *Theor. Computer Sc.* **50** (1987), 1–102.

[Gir] GIRARD J-Y., *"Proof theory and logical complexity"*, Bibliopolis, Napoli (1987).

[Gi2] GIRARD J-Y., On the unity of logic, *Annals of Pure and Applied Logic* **59** (1993), 201–217.

[GLT] GIRARD J-Y., LAFONT Y., TAYLOR P., *"Proof and Types"*, Cambridge University Press (1989).

[Go] GOLDBLATT R.I., Semantical analysis of Orthologic, *Journal of Philosophical Logic* **3** (1974), 19–36.

[Gore] GORÉ R. , A uniform display system for intuitionistic and dual intuitionistic logic, *Technical Report, april 1995, Australian National University.*

[HDP] HYLAND J.M.E., DE PAIVA V.C.V., Full Intuitionistic Linear Logic , *Annals of Pure and Applied Logic*, **64** (1993), 273–291.

[LMSS] LINCOLN P.D., MITCHELL J., SCEDROV A., SHANKAR N., Decision problems for propositional linear logic, In *Proc. 31st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, (1990), 239–311.

[LMSS] LINCOLN P.D., SCEDROV A., SHANKAR N., Linearizing Intuitionistic Implication *Annals of Pure and Applied Logic*, **60** (1993), 151–177.

[ML84] MARTIN-LÖF P., *Intuitionistic type theory, Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures, etc etc*, Bibliopolis, Napoli (1984).

[N0] NISHIMURA H., Sequential method in Quantum Logic, *Journal of Symbolic Logic.* **45** (1980), 339–352.

[P] PRATT V., Linear Logic for Generalized Quantum Mechanics, *disponibile via ftp://boole.stanford.edu/pub/DVI/ql.dvi.Z.*

[S] SAMBIN G., Pretopologies and completeness proofs, *Journal of Symbolic Logic* **60** (1995), 861-878.

[S2] SAMBIN G., A new and elementary method to represent every complete Boolean Algebra *Conference on Logic and Algebra in memory of Roberto Magari*, Dekker (199?).

[T] TAKEUTI G., *"Proof Theory"*, North-Holland (1975).

[Tr] TROELSTRA, A.S., *"Lectures in Linear Logic"*, CSLI Lecture Notes no. 29, Stanford (1992).