

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali

Dispense del corso di
Fluidodinamica

Giulio G. GIUSTERI
g.giusteri@dmf.unicatt.it

Alessandro MUSESTI
a.musesti@dmf.unicatt.it

Anno accademico 2015/2016

Queste dispense sono state composte esclusivamente mediante software libero: Emacs e Kile per scrivere il testo, L^AT_EX per compilarlo, Xfig per le figure, Scilab per l'elaborazione numerica dell'equazione di Blasius (grazie a Franco Pasquarelli che ci ha dato i rudimenti per usarlo), Maxima per qualche conto. Il tutto, naturalmente, nel sistema operativo GNU/Linux.

Un doveroso ringraziamento va a tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione di questi software.

Indice

Introduzione	v
1 Elementi di Meccanica dei continui	1
1.1 Cinematica dei continui	1
1.1.1 Derivata materiale	2
1.1.2 Velocità e calcolo della derivata materiale	2
1.2 Analisi del gradiente di velocità	4
1.2.1 Tensore velocità di deformazione	4
1.2.2 Tensore di vorticità	5
1.2.3 Condizioni al contorno	5
1.2.4 Formula di Eulero	6
1.3 Equazioni di bilancio	6
1.3.1 Teorema del trasporto	6
1.3.2 Bilancio della massa ed equazione di continuità	7
1.3.3 Bilancio della quantità di moto e Teorema degli sforzi	9
1.3.4 Bilancio del momento della quantità di moto	11
1.4 Bilancio dell'energia	11
1.5 Complementi ed esercizi	12
2 Fluidi perfetti barotropici	15
2.1 Condizioni al contorno per i fluidi perfetti	17
2.2 Statica dei fluidi perfetti barotropici	18
2.2.1 Fluido soggetto al proprio peso	19
2.3 Circolazione e vorticità	21
2.4 Fluidodinamica dei fluidi perfetti barotropici	24
2.4.1 Svuotamento di una vasca	26
2.5 Onde di gravità	27
2.5.1 Onde di acqua alta	28
2.5.2 Onde di canale	30
2.6 Moti piani incomprimibili	32
2.6.1 Esempi	33
2.6.2 Il teorema di Kutta-Joukowski	36
2.7 Onde acustiche di piccola ampiezza	38
2.8 Moto subsonico e supersonico	41
2.8.1 Velocità critica nei gas perfetti	42
2.9 Primo principio della termodinamica	43
2.10 Complementi ed esercizi	43

3	Fluidi viscosi ed equazione di Navier-Stokes	47
3.1	Fluidi stokesiani	47
3.2	Fluidi newtoniani e legge di Cauchy-Poisson	49
3.2.1	Equazioni di Navier-Stokes	50
3.2.2	Condizioni al contorno	51
3.2.3	Vorticità e circolazione nei fluidi newtoniani incomprimibili	51
3.3	Numero di Reynolds	52
3.3.1	Altri parametri adimensionali	54
3.4	Soluzioni particolari delle equazioni di Navier-Stokes	54
3.4.1	Flussi viscometrici a simmetria cilindrica	54
3.4.2	Moto generato da un piano oscillante	58
3.5	Decomposizione di Helmholtz-Hodge e ruolo della pressione	59
3.6	Fluidi non newtoniani	60
3.6.1	Moto laminare in un tubo rettilineo	62
3.6.2	Il caso unidimensionale e stazionario	63
3.7	Complementi ed esercizi	65
4	Stabilità e turbolenza nei fluidi newtoniani incomprimibili	68
4.1	Stabilità	68
4.1.1	Stabilità in norma dell'energia	70
4.1.2	Metodo della linearizzazione	72
4.1.3	Instabilità delle discontinuità tangenziali	76
4.1.4	Stabilità dei flussi rotatori	78
4.2	Turbolenza	81
4.2.1	Dimensioni caratteristiche nei moti turbolenti	82
4.2.2	Equazione mediata di Reynolds	84
4.2.3	Viscosità cinematica turbolenta	86
4.2.4	Equazioni filtrate e <i>Large Eddy Simulations</i>	87
4.3	Complementi ed esercizi	88
5	Strato limite	90
5.1	Equazioni di Prandtl per lo strato limite laminare	90
5.1.1	Teoria di Blasius	92
5.2	Strato limite turbolento	96
5.3	Complementi ed esercizi	98
A	Elementi di calcolo tensoriale	101
A.1	Tensori di ordine 2	102
A.2	Analisi dei campi tensoriali	104
A.2.1	Gradiente	105
A.2.2	Divergenza	105
A.2.3	Laplaciano	107
A.2.4	Rotore	107
A.2.5	Altre proprietà del calcolo tensoriale tridimensionale	108
A.3	Operatori differenziali in coordinate polari	109

Introduzione

La fluidodinamica è una disciplina scientifica che pone le sue radici nell'antichità: uno dei primi risultati è il famoso principio di Archimede sul galleggiamento dei corpi, datato III secolo a.C. (celebre è l'esclamazione "Eureka!" che lo ha seguito nella leggenda). In effetti, le navi erano il mezzo di trasporto più comune per coprire grandi distanze (nota: oggi il mezzo di trasporto forse più usato per le grandi distanze è l'aereo, e il suo funzionamento si appoggia comunque sulla dinamica nell'aria) e i problemi di idraulica legati all'apporto idrico per l'agricoltura e lo sviluppo delle città erano di fondamentale importanza. D'altro canto, il campo di applicazione delle equazioni dei fluidi è ampio: con il termine *fluidi* si copre una vasta gamma di materiali, dai liquidi ai gas. Persino il vetro può essere ritenuto un fluido (con un coefficiente di viscosità molto elevato) e d'altronde è difficile fornire fisicamente una definizione rigorosa di fluido (esistono delle definizioni matematiche di alcune classi di fluidi).

In questo corso noi ci occuperemo essenzialmente degli aspetti matematici e modellistici della fluidodinamica. Dal punto di vista matematico, infatti, questa scienza ha fornito innumerevoli problemi da risolvere ed è tuttora fra le discipline più studiate (si pensi alla sterminata letteratura che riguarda le equazioni di Navier-Stokes, che descrivono il moto del fluido più diffuso, l'acqua, ma per cui non esiste ancora un teorema sufficientemente generale che garantisca l'esistenza e l'unicità della soluzione).

L'approccio che seguiremo, almeno inizialmente, sarà quello della Meccanica dei Continui, una disciplina che affronta da un medesimo punto di vista lo studio di una vasta gamma di materiali, solidi o fluidi, cercandone le connessioni profonde, e che raggiunge i migliori risultati proprio con la fluidodinamica e con l'elasticità. Il primo obiettivo sarà quello di *ricavare* le equazioni differenziali che regolano il moto di un determinato tipo di fluido. Per fare questo, dovremo formulare delle ipotesi riguardo al comportamento meccanico di tale fluido, ovvero dovremo scegliere un opportuno *modello*. Tale scelta porterà ad un particolare sistema di *equazioni differenziali alle derivate parziali* (EDP).

In generale, purtroppo, non saremo in grado di risolvere un tale sistema, spesso quindi ci accontenteremo di ricavare dalle EDP delle informazioni di tipo *qualitativo*, che descrivano cioè in qualche senso alcune peculiarità del modello.

In molti casi dovremo anche effettuare delle semplificazioni, a volte grossolane, per poter ottenere informazioni adeguate. Non bisogna quindi dimenticare che tutte le conclusioni che ricaveremo saranno valide per quella scelta particolare che abbiamo fatto, e che la possibilità di applicarle nella *realtà* dipenderà essenzialmente dalla bontà delle scelte fatte.

Capitolo 1

Elementi di Meccanica dei continui

Vogliamo cominciare introducendo i concetti fondamentali della Meccanica dei continui che ci permetteranno di formulare alcune equazioni basilari della fluidodinamica e di studiarne le proprietà.

1.1 Cinematica dei continui

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$. Supponiamo poi di avere un parametro t , il tempo, che può variare in tutto \mathbb{R} (o soltanto in \mathbb{R}^+). La *configurazione di riferimento* \mathcal{B} è un insieme di particelle, ognuna delle quali verrà denotata con una terna $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$. Supporremo per semplicità che tale configurazione si realizzi al tempo $t = 0$, ovvero che il vettore \mathbf{X} denoti proprio la posizione della particella all'istante iniziale nel sistema di riferimento fissato. Denoteremo in generale la *posizione* di una particella \mathbf{X} col vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Il movimento verrà descritto da una funzione $\varphi : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, detta *piazzamento*, che ad ogni particella \mathbf{X} e ad ogni istante t associa la posizione occupata da \mathbf{X} nell'istante considerato, ovvero

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (1.1)$$

Supporremo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(\cdot, t)$ sia iniettiva con inversa $\varphi^{-1}(\cdot, t)$, ovvero

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t).$$

Inoltre supporremo φ, φ^{-1} di classe C^3 nel complesso delle due variabili.

Le variabili \mathbf{x} verranno dette *variabili spaziali o euleriane*, mentre le \mathbf{X} si diranno *variabili materiali o lagrangiane*. Le prime hanno un'importanza fondamentale in fluidodinamica. Gli operatori di derivazione grad, div, rot saranno sempre supposti fatti rispetto alle variabili spaziali. L'insieme $\mathcal{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\mathcal{B}, t)$ si dirà *configurazione all'istante t* , o anche *configurazione attuale*.

Talvolta useremo la seguente notazione: se $F(\mathbf{x}, t)$ è un campo in coordinate spaziali, F^* denoterà lo stesso campo scritto in coordinate materiali, ovvero

$$F^*(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t).$$

Allo stesso modo, se $G(\mathbf{X}, t)$ è un campo in coordinate materiali, porremo

$$G_*(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} G(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t).$$

Cerchiamo ora di comprendere meglio la differenza tra un campo scritto in coordinate materiali $G(\mathbf{X}, t)$ e uno scritto in coordinate spaziali $F(\mathbf{x}, t)$. Fissiamo \mathbf{X} in \mathcal{B} e facciamo variare t : la funzione $G(\mathbf{X}, \cdot)$ descrive come varia la grandezza rappresentata dal campo G al trascorrere del tempo per la particella che occupa la posizione \mathbf{X} nella configurazione di riferimento. Se invece fissiamo \mathbf{x} in $\mathcal{B}(t)$, allora la funzione $F(\mathbf{x}, \cdot)$ esprime come varia la grandezza rappresentata da F al trascorrere del tempo nella posizione \mathbf{x} fissata che viene occupata via via da diverse particelle.

1.1.1 Derivata materiale

Per un campo materiale G esiste un solo concetto di derivata temporale, dato dalla derivata parziale rispetto al secondo argomento

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{X}, t).$$

Per un campo spaziale, invece, abbiamo due concetti distinti di derivata temporale, a seconda se consideriamo solo la dipendenza esplicita dal tempo o anche la dipendenza implicita nascosta nella \mathbf{x} .

Supponiamo di avere un campo spaziale $F(\mathbf{x}, t)$ che varia nel tempo; denoteremo con

$$\frac{\partial F}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

la sua derivata parziale rispetto alla seconda variabile. Ovviamente, questa derivata misura la variazione di F nel tempo per un osservatore che sta fermo nel punto \mathbf{x} . Al campo F è naturalmente associato il campo F^* , che denota la stessa quantità di F dal punto di vista delle coordinate materiali. Definiamo *derivata materiale* di F la derivata rispetto al tempo del campo F^* riportata in coordinate spaziali, ovvero

$$\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial F^*}{\partial t} \right)_*.$$

Precisamente, si ha

$$\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)},$$

dove con $\partial/\partial t$ denotiamo la derivata della funzione (di una variabile)

$$\{t \mapsto F(\varphi(\mathbf{X}, t), t)\}.$$

La derivata materiale misura la variazione di F nel tempo per un osservatore che sia solidale con una determinata particella \mathbf{X} .

1.1.2 Velocità e calcolo della derivata materiale

Definiamo il *campo di velocità* (in coordinate materiali) come

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{X}, t).$$

Nelle coordinate spaziali il campo di velocità si scrive

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V}_*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$$

e si può verificare che

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Infatti,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}^* \right)_* = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)} = \mathbf{V}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t).$$

La vera incognita dei problemi di fluidodinamica è proprio tale campo di velocità espresso in coordinate spaziali, ovvero $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Noto tale campo, in linea di principio è possibile ricostruire il movimento risolvendo il problema di Cauchy⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{X}. \end{cases}$$

Anche se trovare la soluzione globale di tale problema non è sempre facile, dal punto di vista dei fluidi spesso è di scarso interesse.

Grazie all'introduzione del campo di velocità possiamo ora scrivere una formula elegante che chiarisce il significato della derivata materiale. Sia $F(\mathbf{x}, t)$ un campo scalare regolare in coordinate spaziali; calcoliamone la derivata materiale:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \text{grad } F(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Allo stesso modo, se \mathbf{F} è un campo vettoriale, si ha

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{F})\mathbf{v}. \quad (1.3)$$

Introducendo il *campo di accelerazione*

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{x}, t),$$

dalla formula della derivata materiale (1.3) si ottiene subito

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (1.4)$$

Il termine a destra $(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}$ è molto importante, poiché è la fonte della non linearità delle equazioni della fluidodinamica e procura grossi problemi nella trattazione matematica di tali equazioni.

⁽¹⁾ Augustin-Louis CAUCHY (Parigi, 21 agosto 1789 – Sceaux, 23 maggio 1857) ingegnere di ponti e strade, fu persuaso da Lagrange e Laplace a rinunciare all'ingegneria e a dedicarsi completamente alla ricerca matematica. Nel 1831 fu docente di *fisica sublime* all'università di Torino.

⁽²⁾ Giuseppe Lodovico LAGRANGIA (Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813) matematico e astronomo italiano per nascita e formazione, attivo nella sua maturità scientifica per ventuno anni a Berlino e per ventisei a Parigi, nel cui Panthéon è sepolto.

⁽³⁾ Pierre-Simon LAPLACE (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 – Parigi, 5 marzo 1827) matematico, fisico e astronomo, fu uno dei principali scienziati nel periodo napoleonico. Figlio di un contadino piccolo proprietario o forse di un bracciante, dovette la sua educazione all'interesse suscitato in alcuni ricchi vicini dalle sue capacità e dalla sua bella presenza.

1.2 Analisi del gradiente di velocità

Decomponendo il tensore gradiente di velocità $\text{grad } \mathbf{v}$ nella sua parte simmetrica \mathbf{D} e antisimmetrica \mathbf{W} , si ha per definizione

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \right], \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \right]$$

1.2.1 Tensore velocità di deformazione

Il tensore \mathbf{D} viene detto *tensore velocità di deformazione*. Si ha facilmente che $\text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{v}$. Vale inoltre la seguente proposizione.

Proposizione 1.1. *Sia \mathcal{B} un aperto connesso e \mathbf{v} un campo vettoriale di classe C^1 su \mathcal{B} . Allora $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$ se e solo se esistono $\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ tali che*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ovvero il moto è rigido.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$, ovvero $\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x})$. La tesi consiste nel dimostrare che $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ è costante.

Sia B una palla aperta in \mathcal{B} e siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$. Il segmento che congiunge i due punti è dato da

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad s \in [0, 1].$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale segue

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{c}} \text{grad } \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_0^1 \mathbf{W}(\mathbf{c}(s)) \mathbf{c}'(s) ds = \int_0^1 \mathbf{W}(\mathbf{c}(s))(\mathbf{y} - \mathbf{x}) ds.$$

Moltiplicando ambo i membri per $(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ e ricordando che $\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (poiché \mathbf{W} è antisimmetrico), si ottiene

$$[\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})] \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \int_0^1 (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{c}(s))(\mathbf{y} - \mathbf{x}) ds = 0.$$

Ora, ricordando la (A.12) calcoliamo il gradiente rispetto a \mathbf{y} , ottenendo

$$(\mathbf{W}(\mathbf{y}))'(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0};$$

poi calcoliamo il gradiente rispetto a \mathbf{x} :

$$-(\mathbf{W}(\mathbf{y}))' - (\mathbf{W}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

Dall'antisimmetria si ottiene $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{y})$ e dunque \mathbf{W} è costante su B . Dall'arbitrarietà di B si ottiene la tesi. Il viceversa è ovvio. \square

1.2.2 Tensore di vorticità

Il tensore W viene detto *tensore di vorticità*. Dalla definizione di rotore discende

$$W(\mathbf{x}, t)\mathbf{q} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{q}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.5)$$

e il vettore $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ viene detto *vettore di vorticità* del campo \mathbf{v} . Tale vettore sarà spesso denotato col simbolo $\boldsymbol{\omega}$ e rappresenta la velocità angolare locale istantanea. Nel caso del moto rigido si ha infatti $\boldsymbol{\omega}$ costante e $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$.

Se $W = 0$, ovvero la vorticità è nulla, si ha $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ovvero \mathbf{v} è irrotazionale. In questo caso, dal Teorema del potenziale scalare si ha che $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ per un certo $\varphi \in C^2$.

1.2.3 Condizioni al contorno

Poniamo $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(P, t)$. Poiché la mappa $\varphi(\cdot, t)$, a t fissato, è anche un omeomorfismo, ne segue facilmente che

$$\varphi(\partial P, t) = \partial P(t)$$

per ogni sottoinsieme $P \subseteq \mathcal{B}$, ovvero le particelle che stanno sulla frontiera di un insieme nella configurazione di riferimento staranno sulla frontiera dell'evoluzione di tale insieme lungo il moto. In particolare vale la seguente proprietà.

Proposizione 1.2. *Consideriamo la frontiera di $P(t)$. Supponiamo che tale frontiera si possa scrivere in ogni istante in modo implicito come*

$$F(\mathbf{x}, t) = 0$$

con F di classe C^1 . Allora si ha $\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \partial P(t)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia ∂P la frontiera di P nella configurazione di riferimento e sia $\mathbf{X} \in \partial P$. Poiché la frontiera è composta sempre dalle stesse particelle, si ha

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \varphi(\mathbf{X}, t) \in \partial P(t),$$

ovvero $F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $\{t \mapsto F(\varphi(\mathbf{X}, t), t)\}$ è costante nel tempo, e dunque $\frac{dF}{dt} = 0$ sulla frontiera di $P(t)$. \square

In particolare, considerando una funzione F che descriva implicitamente la frontiera di tutto $\mathcal{B}(t)$, poiché vale

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{grad} F \cdot \mathbf{v} = 0,$$

dato $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}(t)$ e detta \mathbf{n} la normale a $\partial \mathcal{B}(t)$ in \mathbf{x} si ha

$$v_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = - \frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

1.2.4 Formula di Eulero

Calcolando il determinante jacobiano della trasformazione (1.1) rispetto alle \mathbf{X} si ottiene il cosiddetto *coefficiente di dilatazione cubica*

$$J(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\text{Grad } \varphi(\mathbf{X}, t)) = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right),$$

dove l'operatore Grad denota il gradiente in coordinate materiali X_j . Si noti che, poiché φ è un diffeomorfismo, il coefficiente di dilatazione cubica non potrà mai annullarsi e il suo segno resterà costante. Visto poi che la configurazione di riferimento è realizzata (nell'istante $t = 0$), data la continuità rispetto a t si dovrà dunque avere

$$J > 0.$$

Per tale coefficiente vale anche la *formula di Eulero*⁽⁴⁾, dimostrata nell'esercizio 1.2,

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \quad (1.6)$$

dove (attenzione!) la divergenza è calcolata nelle coordinate spaziali. Questa formula si può scrivere tutta in coordinate spaziali in questo modo:

$$\frac{dJ_*}{dt}(\mathbf{x}, t) = J_*(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

anche se il suo utilizzo principale è quello della prima formulazione.

1.3 Equazioni di bilancio

Formuleremo in questa sezione alcuni assiomi basilari per la meccanica dei continui, e lo faremo postulando determinate equazioni di bilancio. Vedremo poi come tramite il Teorema degli sforzi di Cauchy sia possibile ottenere l'equazione del moto.

1.3.1 Teorema del trasporto

Prima di passare alla formulazione dei principi della dinamica dei continui, dimostriamo un teorema molto utile di derivazione sotto il segno di integrale. Sia P un insieme aperto e limitato di particelle nella configurazione di riferimento e sia $P(t) = \varphi(P, t)$, in modo che $P = P(0)$.

Teorema 1.3. (Teorema del trasporto) *Dato un campo scalare o vettoriale $F(\mathbf{x}, t)$, si ha*

$$\left(\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right)' = \int_{P(t)} \left(\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) dV,$$

⁽⁴⁾Leonhard EULER (Basilea, 15 aprile 1707 – San Pietroburgo, 18 settembre 1783) uno dei grandissimi della matematica e della fisica, noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi, ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree. Sembra che Pierre-Simon Laplace abbia affermato: “Leggete Eulero; egli è il maestro di tutti noi”. Eulero è stato senz'altro il più grande fornitore di denominazioni matematiche, offrendo il suo nome a una quantità impressionante di formule, teoremi, metodi, criteri, relazioni, equazioni.

dove a primo membro si intende la derivata rispetto al tempo della funzione

$$\left\{ t \mapsto \int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right\}.$$

Dimostrazione. Effettuando il cambio di variabili $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ e notando che il coefficiente di dilatazione cubica J è proprio lo jacobiano di tale cambio, a t fissato si ha

$$\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\varphi(P,t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \int_P F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J dV.$$

Se ora derivo l'integrale rispetto a t , poiché il dominio di integrazione non dipende dal tempo posso portare la derivata sotto il segno di integrale, dunque

$$\begin{aligned} \left(\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right)' &= \int_P \frac{\partial}{\partial t} [J(\mathbf{X}, t) F(\varphi(\mathbf{X}, t), t)] dV \\ &= \int_P \left(J(\mathbf{X}, t) \frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) + F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right) dV. \end{aligned}$$

Applicando la formula di Eulero e facendo il cambio di variabili inverso al precedente si ottiene

$$\left(\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right)' = \int_{P(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)} + F(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] dV$$

e ricordando che $\frac{dF}{dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)}$ si ottiene la tesi. \square

Osserviamo che se F, \mathbf{F} sono rispettivamente un campo scalare e un campo vettoriale, il Teorema del trasporto si può anche scrivere come

$$\begin{aligned} \left(\int_{P(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right)' &= \int_{P(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\mathbf{v}) \right) dV = \int_{P(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{\partial P(t)} F\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \left(\int_{P(t)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dV \right)' &= \int_{P(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{v}) \right) dV = \int_{P(t)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dV + \int_{\partial P(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{F} dS. \end{aligned}$$

1.3.2 Bilancio della massa ed equazione di continuità

Una delle caratteristiche principali dei corpi è che essi possiedono una *massa*. Poiché noi trattiamo corpi *continui*, supporremo che per ogni t nella configurazione all'istante t esista una funzione $\rho(\mathbf{x}, t)$ di classe C^1 e integrabile tale che, dato un insieme $P(t) = \varphi(P, t)$ aperto e limitato di particelle, la massa di $P(t)$ si esprima come

$$M(P(t)) = \int_{P(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV.$$

Chiaramente, l'unità di misura di ρ è $[\text{kg}/\text{m}^3]$. Notiamo che si ha

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(B_r(\mathbf{x}))}{V(B_r(\mathbf{x}))},$$

dove $V(B_r(\mathbf{x}))$ è il volume della palla di centro \mathbf{x} e raggio r . Il campo ρ è detto *densità di massa* per la configurazione all'istante t .

In particolare, la funzione $\rho_0(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\mathbf{X}, 0)$ è la densità di massa nella configurazione di riferimento.

Esprimiamo il *Principio di conservazione della massa* dicendo che la massa di un insieme di particelle si conserva durante il moto, ovvero

$$M(P(t)) = M(P) \quad (1.7)$$

per ogni $P \subset \mathcal{B}$ aperto limitato e per ogni t . In termini della densità questo significa che

$$\frac{d}{dt} M(P(t)) = \frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho dV = 0,$$

e applicando il Teorema del trasporto risulta

$$\int_{P(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0.$$

Poiché l'integrale si annulla per ogni configurazione $P(t)$ e l'integrando è continuo, si ha

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.8)$$

che è la nota *equazione di continuità*. Essa esprime la conservazione *locale* della massa e può anche porsi nella forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Il bilancio della massa può anche essere espresso nella formulazione lagrangiana (per quanto questo sia meno rilevante dal punto di vista dei fluidi). Usando il solito cambio di variabile $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ si ha

$$M(P(t)) = \int_P J(\mathbf{X}, t) \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) dV$$

e dunque il bilancio della massa (1.7) si scrive

$$\int_P J(\mathbf{X}, t) \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) dV = \int_P \rho_0(\mathbf{X}) dV$$

da cui, per l'arbitrarietà di P ,

$$J(\mathbf{X}, t) \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = \rho_0(\mathbf{X}). \quad (1.9)$$

In particolare, l'equazione di continuità (1.8) ci permette di formulare un corollario del Teorema del Trasporto di cui faremo uso nel seguito.

Corollario 1.4. *Dato un campo scalare o vettoriale $F(\mathbf{x}, t)$, si ha*

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho F dV = \int_{P(t)} \rho \frac{dF}{dt} dV.$$

Dimostrazione. Applicando il Teorema del Trasporto al primo membro si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho F dV = \int_{P(t)} \left(F \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dF}{dt} + \rho F \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = \int_{P(t)} \left[F \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \rho \frac{dF}{dt} \right] dV,$$

e grazie all'equazione di continuità segue la tesi. \square

1.3.3 Bilancio della quantità di moto e Teorema degli sforzi

Analizziamo ora le forze che possono agire su una regione $P(t)$ di materiale al tempo t ; tra queste distingueremo le forze esterne, dette anche *forze di volume*, e le forze interne, ovvero le forze che il materiale esterno a $P(t)$ esercita sulla regione stessa. Per fare un esempio: se il corpo è il mare e $P(t)$ è una regione di acqua, la forza di volume è la forza gravitazionale dovuta alla massa della regione, mentre la forza interna è la pressione subita dalla regione a causa dell'acqua circostante.

Supporremo che le forze esterne ammettano una *densità di forza per unità di massa* $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, in modo che la risultante delle forze di volume su $P(t)$ sia

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{b} dV .$$

Riguardo invece alle forze interne, adotteremo il cosiddetto *Postulato di Cauchy*: se S è una superficie nel nostro corpo continuo $\mathcal{B}(t)$ all'istante t , orientata mediante una normale \mathbf{n} , allora esiste una distribuzione di *sforzi*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; S)$$

che rappresenta la densità di forza per unità di area esercitata attraverso S dal materiale che sta da una parte di S su quello che sta dall'altra parte. In particolare, \mathbf{t} si orienta convenzionalmente nella direzione della forza esercitata dalla parte positiva di S (ovvero dalla parte di \mathbf{n}) verso quella negativa (ovvero quella di $-\mathbf{n}$). Tale ipotesi afferma in sostanza che le forze interne agiscono come un flusso attraverso la superficie S , e sono quindi *forze di superficie*. Inoltre assumiamo che \mathbf{t} dipenda da S solo attraverso la normale \mathbf{n} , ovvero si abbia

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; S) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) .$$

Completiamo infine il Postulato di Cauchy imponendo che la dipendenza di \mathbf{t} dalla normale sia continua. Supporremo poi come al solito che \mathbf{t} sia di classe C^1 in \mathbf{x} .

In questo modo il *Principio di conservazione della quantità di moto*, che sostanzialmente dice che la derivata temporale della quantità di moto eguaglia le forze applicate, si può esprimere come

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{P(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} dS . \quad (1.10)$$

Osserviamo subito che il Corollario 1.4 implica

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{P(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV ,$$

quindi la (1.10) diventa

$$\int_{P(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{P(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} dS . \quad (1.11)$$

Vediamo subito una prima conseguenza di questa equazione.

Lemma 1.5. *Sia P_r una famiglia decrescente di aperti nella configurazione al tempo t tali che $V(P_r) \sim r^3$ per $r \rightarrow 0$. Allora si ha*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{\partial P_r} \mathbf{t} dS = 0,$$

ovvero gli sforzi sono in equilibrio locale.

Dimostrazione. Scriviamo la (1.11) per P_r : i primi due integrali sono integrali di volume di funzioni continue, quindi vanno come r^3 per r che tende a 0. In particolare, se dividiamo tutto per r^2 e mandiamo r a 0, essi tendono a 0. Quindi tende a 0 anche l'ultimo integrale. \square

Il seguente teorema si pone a fondamento della Meccanica dei continui.

Teorema 1.6. (Teorema degli sforzi di Cauchy) *Per ogni (\mathbf{x}, t) il vettore $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$ è lineare in \mathbf{n} , quindi esiste un tensore \mathbb{T} di ordine due tale che*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \mathbb{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}.$$

Tale tensore \mathbb{T} si dice *tensore di Cauchy*.

Dimostrazione. Fissiamo ora \mathbf{x} e t e poniamo $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$. Sia $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ con $n_i > 0$. Consideriamo la famiglia Q_r di tetraedri che abbiano tre facce sui piani coordinati passanti per \mathbf{x} , la faccia inclinata di normale \mathbf{n} e il volume che va come r^3 . Denotando con S_r l'area della faccia inclinata e con S_r^i le aree delle facce di normali $-\mathbf{e}_i$, si ha che $S_r \sim r^2$ e $S_r^i = n_i S_r$. Applicando il lemma precedente alla famiglia $\{Q_r\}$ si ottiene

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) + n_1\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) + n_2\mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) + n_3\mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$$

per ogni $n_i > 0$. Poiché \mathbf{t} è continuo in \mathbf{n} , tale relazione si estende al caso in cui $n_i \geq 0$, quindi in particolare si ottiene

$$\mathbf{t}(-\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) \quad i = 1, 2, 3$$

e dunque

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) + n_2\mathbf{t}(\mathbf{e}_2) + n_3\mathbf{t}(\mathbf{e}_3).$$

Ripetendo ora lo stesso ragionamento negli altri ottanti, si ottiene la tesi. \square

Introduciamo ora il tensore di Cauchy nell'integrale superficiale dell'equazione (1.11) e applichiamo il Teorema della divergenza:

$$\int_{\partial P(t)} \mathbf{t} dS = \int_{\partial P(t)} \mathbb{T}\mathbf{n} dS = \int_{P(t)} \operatorname{div} \mathbb{T} dV.$$

Quindi abbiamo tutti integrali di volume; dall'arbitrarietà di $P(t)$, poiché i campi sono regolari, si ottiene l'equazione locale

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbb{T} \quad (1.12)$$

che è la celeberrima *equazione del moto*, cardine di tutti i modelli che affronteremo.

1.3.4 Bilancio del momento della quantità di moto

A completamento delle ipotesi precedenti, assumeremo anche il *bilancio del momento della quantità di moto*, ovvero

$$\frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV = \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS, \quad (1.13)$$

per ogni t e per ogni P . Come spiega la proposizione seguente, questa ipotesi non produce una nuova equazione differenziale, bensì alcune restrizioni sulle componenti del tensore di Cauchy.

Proposizione 1.7. *Dato il bilancio della massa e della quantità di moto, si ha che vale il bilancio del momento della quantità di moto (1.13) se e solo se il tensore di Cauchy \mathbb{T} è simmetrico.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ costante. Se moltiplichiamo l'equazione del moto (1.12) vettorialmente per $\boldsymbol{\omega}$ e scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$ e poi integriamo su $P(t)$ otteniamo

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{P(t)} \mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbb{T} dV \quad (1.14)$$

Inoltre dal Corollario 1.4 segue

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{P(t)} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \frac{d}{dt} \int_{P(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV.$$

Studiamo ora l'ultimo integrale della (1.14): ricordando la formula di Gauss-Green (A.19), con facili passaggi si ha

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \cdot \operatorname{div} \mathbb{T} dV &= \int_{\partial P(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbb{T} \mathbf{n} dS - \int_{P(t)} \operatorname{grad}(\mathbb{W}\mathbf{x}) \cdot \mathbb{T} dV = \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{\partial P(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS - \int_{P(t)} \mathbb{W} \cdot \mathbb{T} dV, \end{aligned}$$

dove \mathbb{W} è la matrice antisimmetrica che rappresenta il prodotto vettoriale con $\boldsymbol{\omega}$. Da questa formula segue subito la dimostrazione, infatti: se vale il bilancio del momento della quantità di moto allora deve essere

$$\int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{W} dV = 0$$

e dall'arbitrarietà di $P(t)$ e \mathbb{W} si ottiene che \mathbb{T} è simmetrico; e viceversa. \square

1.4 Bilancio dell'energia

Vogliamo ora trattare il caso in cui le variabili termodinamiche entrano in gioco nella formulazione del problema del moto per un mezzo continuo, introducendo una nuova equazione di bilancio, il *bilancio dell'energia*. Scriviamo l'energia interna di un volume regolare $P(t)$ come

$$E(t) = \int_{P(t)} \rho \varepsilon dV,$$

dove ε denota la *densità di energia interna*, e supponiamo che le varie parti del mezzo continuo possano scambiare calore sia come flusso attraverso la frontiera (e denoteremo con \mathbf{q} la densità superficiale di tale flusso), sia mediante una distribuzione di sorgenti di calore (di cui denoteremo la densità volumetrica per unità di massa con r). Quindi enunciamo il bilancio dell'energia totale in forma integrale alla maniera del primo principio della termodinamica, ovvero assumendo che la variazione nel tempo dell'energia totale di ogni volume P eguagli la somma della potenza meccanica e del calore assorbiti:

$$\frac{d}{dt}(K + E) = \int_{P(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{P(t)} \rho r dV - \int_{\partial P(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.15)$$

Combinando questa equazione con la (1.19) e sfruttando l'arbitrarietà di $P(t)$ e il Teorema della divergenza si ottiene

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} \quad (1.16)$$

che è detta *equazione dell'energia interna*.

1.5 Complementi ed esercizi

Esercizio 1.1. Dimostrare la validità della seguente formula per il campo di accelerazione in coordinate spaziali:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{v}^2) + (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \quad (1.17)$$

Svolgimento. Ricordando l'equazione (A.27) si ottiene l'espressione voluta. \diamond

Esercizio 1.2. Dimostrare la validità della formula di Eulero in coordinate materiali

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t).$$

Svolgimento. Per dimostrare tale formula occorre il seguente lemma:

Lemma 1.8. *Data una matrice A , si ha*

$$\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + o(\varepsilon) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0,$$

dove I è la matrice identica e $o(\varepsilon)$ è tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|o(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$.

Dimostrazione. Si ha

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + i_1(A)\lambda^2 - i_2(A)\lambda + i_3(A),$$

dove i_1, i_2, i_3 sono gli invarianti principali della matrice A (in particolare, i_1 è la traccia e i_3 il determinante). Dal fatto che $i_k(\varepsilon A) = \varepsilon^k i_k(A)$ si ottiene quindi

$$\det(\varepsilon A - \lambda I) = -\lambda^3 + \varepsilon i_1(A)\lambda^2 - \varepsilon^2 i_2(A)\lambda + \varepsilon^3 i_3(A).$$

Ponendo $\lambda = -1$ si ha la tesi. \square

Dal lemma precedente segue che

$$\det[I + \varepsilon A + o(\varepsilon)] = \det \left[I + \varepsilon \left(A + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right] = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + o(\varepsilon) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.18)$$

dove $o(\varepsilon)$ può denotare anche una matrice la cui norma tende a 0 più in fretta di ε .

Consideriamo ora lo sviluppo di Taylor⁽⁵⁾ di $\operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t)$ attorno a t :

$$\begin{aligned} \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t + \varepsilon) &= \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t) + \varepsilon \operatorname{Grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + o(\varepsilon) \\ &= \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t) [I + \varepsilon \operatorname{Grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t)^{-1} + o(\varepsilon)] \end{aligned}$$

e notiamo che $\operatorname{Grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \operatorname{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t)^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \operatorname{grad} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t)$, ovvero il gradiente in coordinate euleriane della velocità. Calcolando il determinante nella formula precedente si ottiene

$$J(\mathbf{X}, t + \varepsilon) = J(\mathbf{X}, t) [1 + \varepsilon \operatorname{tr} \operatorname{grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + o(\varepsilon)] = J(\mathbf{X}, t) + \varepsilon J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + o(\varepsilon)$$

che è lo sviluppo di Taylor di J attorno a t . Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t)$$

che è la tesi. ◇

Esercizio 1.3. Definendo l'*energia cinetica* di un insieme regolare di particelle $P(t)$ all'istante t come

$$K = \frac{1}{2} \int_{P(t)} \rho |\mathbf{v}|^2 dV,$$

si dimostri il seguente

Teorema (dell'energia cinetica). *Supposti validi il bilancio della massa, della quantità di moto e del momento della quantità di moto, vale la seguente formula:*

$$\frac{dK}{dt} = \int_{P(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \mathbf{D} dV. \quad (1.19)$$

Svolgimento. Dal Corollario 1.4 si ha

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \int_{P(t)} \rho \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|^2 dV = \int_{P(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV.$$

Sfruttando l'equazione del moto

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbb{T},$$

si ottiene

$$\frac{dK}{dt} = \int_{P(t)} \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbb{T}) dV.$$

⁽⁵⁾ Brook TAYLOR (Edmonton, 18 agosto 1685 – Londra, 29 dicembre 1731) matematico inglese, inventore del calcolo delle differenze finite, lo ha usato con successo per determinare la forma del movimento di una corda vibrante. Nel suo *Saggio sulla prospettiva lineare* Taylor ha espresso i veri principi della prospettiva in una forma più originale e generale rispetto a qualsiasi altro predecessore; ma il lavoro ha sofferto per la sua brevità e per la sua oscurità, difetti che hanno interessato la maggior parte delle sue opere.

Poiché dalla formula (A.16) e dal Teorema della divergenza si ha

$$\int_{P(t)} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbb{T} dV = \int_{P(t)} \operatorname{div}(\mathbb{T}'\mathbf{v}) dV - \int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} dV = \int_{\partial P(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbb{T}\mathbf{n} dS - \int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} dV,$$

tenendo conto dell'espressione di \mathbf{t} in funzione di \mathbb{T} e della simmetria di \mathbb{T} si ha la tesi. \square

Il termine $\int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} dV$ si chiama *potenza degli sforzi* o *potenza di deformazione*. Se si riscrive la (1.19) come

$$\int_{P(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial P(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{dK}{dt} + \int_{P(t)} \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} dV,$$

tale formula si può interpretare dicendo che la potenza spesa dalle forze (esterne e interne) è uguale alla variazione dell'energia cinetica più la potenza di deformazione. \diamond

Capitolo 2

Fluidi perfetti barotropici

È giunto finalmente il momento di caratterizzare alcuni tipi particolari di fluidi. Per fare ciò è necessario formulare delle ipotesi sul tensore di Cauchy, visto che è proprio tale tensore che descrive gli sforzi interni e quindi il comportamento dinamico del materiale. Questo si esprime di solito dicendo che si deve prescrivere una *equazione costitutiva* per il tensore degli sforzi \mathbf{T} . Tale equazione specifica il modo in cui \mathbf{T} dipende da determinate variabili.

Decomponiamo lo sforzo $\mathbf{T}\mathbf{n}$ nella parte *normale* e in quella *di taglio*:

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = (\mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + [\mathbf{T}\mathbf{n} - (\mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{T}\mathbf{n} + [\mathbf{I} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]\mathbf{T}\mathbf{n}.$$

La scelta forse più semplice, ma non per questo banale, che può essere fatta per un fluido è quella di supporre che la componente di taglio si annulli, ovvero che $\mathbf{T}\mathbf{n}$ sia sempre diretto lungo \mathbf{n} . Sebbene in condizioni statiche tale ipotesi sia alquanto generale, in regime dinamico il supporre l'assenza di sforzi di taglio corrisponde a trascurare la *viscosità* di un fluido, e questo porta a dei modelli non sempre adeguati. Vedremo più avanti le modifiche da apportare a questa scelta per dei modelli più fedeli.

L'ipotesi di sforzo di taglio nullo equivale a dire che ogni vettore è un *autovettore* per \mathbf{T} , e dunque il tensore deve essere un multiplo del tensore identico:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}.$$

Infatti: ogni vettore della base canonica è in particolare un autovettore, quindi $\mathbf{T}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$ e la matrice di \mathbf{T} nella base canonica è diagonale. Inoltre anche $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore, e dunque

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \lambda(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$$

da cui $\lambda_i = \lambda$.

Si assume poi che il coefficiente p , detto *pressione*, sia un numero positivo. In generale la pressione dipende dalla posizione e dal tempo, e quindi si ha

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}. \quad (2.1)$$

Un fluido il cui tensore degli sforzi verifichi tale equazione si dice *fluido perfetto*.

Sostituendo la (2.1) nell'equazione locale del bilancio della quantità di moto e ricordando (A.15), si ottiene

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{b} - \text{grad } p, \quad (2.2)$$

che viene detta *equazione di Eulero*, dove ricordiamo che \mathbf{b} è la densità volumetrica di forza, ρ la densità di massa e \mathbf{v} il campo di velocità. Ad essa va aggiunta l'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Richiamiamo poi un paio di definizioni.

- Un fluido si dice *barotropico* se esiste un'equazione costitutiva

$$\rho = f(p)$$

con $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ funzione di classe C^1 . Introducendo la *funzione di pressione*

$$\mathcal{P}(p; p_0) = \int \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^p \frac{1}{f(s)} ds,$$

dove $p_0 \in \mathbb{R}$ è fissato a priori, si ha

$$\operatorname{grad} \mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{dp}(p; p_0) \operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

e dunque, se il fluido è perfetto, l'equazione di Eulero si può scrivere nella forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{b} - \operatorname{grad} \mathcal{P}. \quad (2.3)$$

Si noti che la funzione di pressione è strettamente crescente e dunque invertibile; nota \mathcal{P} è quindi sempre possibile ricavare la pressione p invertendo la funzione.

La principale caratteristica dei fluidi barotropici è che, nel caso di forze conservative, l'accelerazione ammette un potenziale, ovvero è irrotazionale, come si vede subito dalla (2.3). In questo caso, usando la formula (1.17) per l'accelerazione e prendendo il rotore di ambo i membri della (2.3) si ottiene l'equazione del moto nella forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

in cui non compaiono più né la pressione, né la densità.

- Un fluido si dice *incomprimibile* se la densità di massa ρ è una costante (ovviamente positiva), diciamo $\rho = \rho_0$. Dall'equazione di continuità segue subito che deve essere allora $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Generalmente il modello di fluido incomprimibile viene usato per descrivere il comportamento dei liquidi reali, mentre quello comprimibile viene sfruttato per i gas.

Un fluido incomprimibile è inoltre barotropico con f costante e in questo caso la funzione di pressione è

$$\mathcal{P}(p; p_0) = \frac{p - p_0}{\rho_0}.$$

Per un fluido perfetto incomprimibile l'equazione di Eulero diventa

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{b} - \operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho_0} \right). \quad (2.5)$$

Un moto si dice *stazionario* se $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}$ per ogni t , ovvero se il campo di velocità, il campo di densità e la configurazione attuale del moto non dipendono esplicitamente dal tempo.⁽¹⁾ Si dice *irrotazionale* se $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Si dicono *linee di corrente* quelle linee nel fluido che sono tangenti in tutti i loro punti al campo di velocità \mathbf{v} . Naturalmente, quando il moto è stazionario le linee di corrente sono indipendenti dal tempo e coincidono con le traiettorie delle particelle.

2.1 Condizioni al contorno per i fluidi perfetti

È giunto finalmente il momento di parlare delle condizioni al contorno da imporre ad un fluido perfetto. Dal punto di vista delle equazioni differenziali alle derivate parziali, il sistema che governa il moto di un fluido perfetto si scrive

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = \rho \mathbf{b} - \text{grad } p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad } \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

a cui devono essere aggiunte opportune condizioni iniziali e al contorno. Per ciò che riguarda le condizioni iniziali, poco deve essere detto: è sufficiente assegnare le funzioni $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$, $\rho(\mathbf{x}, 0)$ e $p(\mathbf{x}, 0)$ (ovviamente, nel caso barotropico il legame tra la densità e la pressione rende superflua l'assegnazione di una delle ultime due funzioni).

Più interessante è l'assegnazione delle condizioni al contorno, perché esse riguardano l'interazione tra il fluido e il contenitore, e tale interazione deve essere in qualche modo modellizzata. Ovviamente, dove la frontiera del fluido è libera varranno le condizioni cinematiche studiate nel paragrafo 1.2.3. Dove al contrario la frontiera della regione di fluido è a contatto con una parete (che a sua volta può essere fissa o mobile), proprio l'assenza dello sforzo di taglio, caratteristica dei fluidi perfetti, impone di assegnare la cosiddetta *condizione di impenetrabilità* (o *slip condition*), in cui si impone

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}(t),$$

dove \mathbf{V} è la velocità della parete (che in generale è assegnata) e \mathbf{n} è la normale alla parete stessa. Quindi le particelle di fluido a contatto con la parete si possono muovere liberamente lungo la parete stessa, mentre devono muoversi solidalmente alla parete per quanto riguarda la direzione normale.

Osserviamo che nel caso di un fluido perfetto barotropico (quindi anche nel caso incomprimibile) il problema del moto è impostato completamente in ambito puramente meccanico; mentre, quando non sussiste un legame tra pressione e densità di massa, non è possibile impostare tale problema in maniera completa rimanendo solo in ambito meccanico poiché non vi è pareggiamento tra numero di incognite ed equazioni scalari: in questo caso si ricorre alle informazioni e alle variabili termodinamiche.

⁽¹⁾Si possono dare esempi in cui la velocità non dipende esplicitamente dal tempo mentre la densità sì. Uno dei più semplici è il caso unidimensionale in cui $\varphi(X, t) = X e^t$, da cui $v(x, t) = x$ è indipendente dal tempo, mentre dall'equazione (1.9) $\rho(x, t) = \rho_0 e^{-t}$ dipende esplicitamente da t (ρ_0 è la densità nella configurazione iniziale, supposta uniforme per semplicità).

2.2 Statica dei fluidi perfetti barotropici

Nello studio della *fluidostatica* si suppone che il fluido sia in equilibrio, ovvero che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tale ipotesi è ben più forte del caso *stazionario*, in cui semplicemente si suppone che il campo di velocità sia indipendente dal tempo, ma non necessariamente nullo.

Supponiamo che il fluido in quiete sia perfetto. Si noti che nel caso statico tale ipotesi è molto ragionevole, in quanto la presenza di una eventuale viscosità si manifesta solitamente mediante una frizione tra le varie parti del fluido e quindi non appare se il fluido è fermo.

In questo caso l'equazione di Eulero diventa

$$\rho \mathbf{b} = \text{grad } p \quad (2.6)$$

che viene detta *equazione fondamentale della fluidostatica*. Anche l'equazione di continuità si semplifica molto e diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ovvero la densità non dipende dal tempo ma solo dalle coordinate spaziali. Quindi nella (2.6) si ha che p dipende dal tempo se e solo se \mathbf{b} dipende dal tempo.

Supponiamo poi che il fluido sia barotropico. Riscrivendo la (2.6) con la funzione di pressione, si giunge a

$$\mathbf{b} = \text{grad } \mathcal{P}(p). \quad (2.7)$$

Si ha allora il seguente teorema.

Teorema 2.1. *Per un fluido perfetto barotropico, il problema statico ammette soluzione se e solo se il campo delle forze di volume \mathbf{b} è irrotazionale.*

Dimostrazione. Se p è una soluzione di (2.7), allora $\text{rot } \mathbf{b} = \text{rot grad } \mathcal{P}(p) = \mathbf{0}$ e dunque \mathbf{b} è irrotazionale.

Viceversa, se $\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{0}$ allora esiste un campo scalare $-\Psi$ tale che $\mathbf{b} = -\text{grad } \Psi$ (Teorema del potenziale scalare). Quindi si ha

$$\text{grad}(\mathcal{P} + \Psi) = \mathbf{0}$$

e dunque $\mathcal{P}(p(x, y, z); p_0) + \Psi(x, y, z)$ è costante su ogni componente connessa della regione \mathcal{B} in cui si muove il fluido. Poiché dalla funzione di pressione si ricava p e la densità si trova dalla relazione costitutiva $\rho = f(p)$, il problema è risolto. \square

Nel caso in cui \mathbf{b} sia irrotazionale, usando le notazioni della precedente dimostrazione, ogni soluzione p si esprime come

$$p(x, y, z) = \mathcal{P}^{-1}(C - \Psi(x, y, z); p_0), \quad (2.8)$$

dove C è costante su ogni componente connessa di \mathcal{B} . In particolare, se il fluido è incomprimibile si ha

$$p(x, y, z) - p_0 = \rho_0 C - \rho_0 \Psi(x, y, z). \quad (2.9)$$

2.2.1 Fluido soggetto al proprio peso

Consideriamo il caso importante in cui \mathbf{b} è la forza peso. Supponendo che tale forza abbia direzione costante verso il basso, si può scrivere

$$\mathbf{b}(x, y, z) = -g(x, y, z)\mathbf{e}_3.$$

Per avere una soluzione statica si deve imporre $\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{0}$, ovvero

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{e dunque} \quad g = g(z).$$

Un potenziale di \mathbf{b} è dato da

$$\Psi(z) = G(z) = \int_{z_0}^z g(s) ds;$$

se si suppone $p(z_0) = p_0$, la (2.8) diventa

$$p(z) = \mathcal{P}^{-1}(-G(z)).$$

Se g è costante e il fluido è incomprimibile, dalla (2.9) si ricava

$$p(z) = p_0 + \rho_0 g(z_0 - z)$$

che è la nota *legge di Stevino*⁽²⁾.

Gas perfetto isoterma

Se invece siamo nel caso di un gas perfetto a temperatura ϑ costante, il fluido è barotropico e si ha

$$\rho = \frac{p}{R\vartheta}, \quad (2.10)$$

dove R è la costante universale dei gas perfetti. La funzione di pressione e la sua inversa valgono

$$\mathcal{P}(p; p_0) = R\vartheta \log \frac{p}{p_0}, \quad \mathcal{P}^{-1}(\xi; p_0) = p_0 e^{\xi/R\vartheta}$$

e dunque, se di nuovo supponiamo g costante,

$$p(z) = \mathcal{P}^{-1}(-G(z)) = p_0 e^{g(z_0 - z)/R\vartheta},$$

che dà la legge con cui cala la pressione salendo di quota. Tale modello può essere applicato in prima approssimazione all'atmosfera vicino alla superficie terrestre (poiché g è costante), anche se in realtà si ha una variazione della temperatura con la quota che non è trascurabile.

⁽²⁾Simon STEVIN (Bruges, 1548 – L'Aia, 1620) ingegnere, fisico e matematico fiammingo pre-galileiano; a lui si deve l'introduzione di una nuova notazione per i numeri decimali, che permetteva di estendere a tali numeri le normali operazioni algebriche sui numeri interi, senza usare la notazione frazionaria. Tale innovazione ha aperto la strada alla notazione decimale moderna e al concetto di "numero reale". Stevino pensava che la lingua fiamminga fosse eccellente per scrivere di scienza, tradusse quindi moltissimi termini matematici in fiammingo; il fiammingo risulta così una delle poche lingue europee a possedere molti termini matematici non derivati dal latino, compreso *Wiskunde* (matematica).

Gas perfetto omentropico

Un gas omentropico è un gas in cui l'entropia è costante (nel tempo) e uniforme (nello spazio). In questo caso, anche se la temperatura ϑ non è costante, oltre alla (2.10) vale la legge

$$\rho = Cp^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.11)$$

dove C è una costante e $\gamma > 1$ è il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante. Supponendo di nuovo g costante e sviluppando i conti come sopra, si perviene alla formula

$$p(z) = \left(C \frac{\gamma-1}{\gamma} g(z_0 - z) + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

che dà la pressione in funzione della quota. Inoltre, poiché combinando (2.10) e (2.11) si ottiene

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = CR\vartheta,$$

possiamo esprimere la variazione di temperatura in funzione della quota come

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\frac{\gamma-1}{R\gamma} g(z - z_0), \quad (2.12)$$

ovvero la temperatura cala *linearmente* con la quota.

Tale formula può essere applicata allo studio della stabilità dell'equilibrio statico dell'atmosfera. In questo caso infatti non vale l'omentropia e ci possono essere varie distribuzioni di densità che risultano staticamente possibili. Non tutte però sono stabili: risultano stabili solo quelle per cui la densità di massa decresce con la quota almeno tanto quanto avviene per la distribuzione omentropica. Infatti, immaginiamo che sia data una certa distribuzione statica di densità di massa, pressione e temperatura dell'aria nell'atmosfera; se un piccolo volume viene sollevato, esso si modificherà adiabaticamente in modo da raggiungere i valori di temperatura e pressione del nuovo ambiente circostante. La nuova densità sarà data quindi dalla legge dei gas omentropici. Se tale densità è minore di quella circostante, il volumetto continuerà a salire e quindi c'è instabilità; se invece la nuova densità è maggiore di quella circostante, il volumetto tornerà indietro e ci sarà la stabilità. La distribuzione omentropica rappresenta una distribuzione di equilibrio indifferente.

Traduciamo il discorso per la temperatura: poiché per la legge dei gas perfetti nel caso adiabatico si ha

$$\vartheta = \frac{\rho^{\gamma-1}}{RC\gamma},$$

la temperatura è funzione monotona crescente della densità. Quindi per avere stabilità la temperatura non deve calare con la quota più di quanto avviene nella (2.12). Tenendo conto che per l'aria si ha circa $\gamma = 1,4$ e $R = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{°K}}$, il gradiente termico della (2.12) risulta

$$\frac{d\vartheta}{dz} = -\frac{\gamma-1}{R\gamma} g = -9,76 \cdot 10^{-3} \frac{\text{°K}}{\text{m}},$$

ovvero la temperatura cala di quasi 1 grado ogni 100 metri. Quindi le distribuzioni d'aria che hanno un gradiente termico più alto di questo sono stabili. In particolare, nel fenomeno dell'*inversione*, in cui la temperatura *cresce* con la quota (situazione che può avvenire quando una massa d'aria calda viene a trovarsi su un terreno particolarmente freddo), c'è una situazione particolarmente stabile. In queste condizioni l'aria inquinata resta intrappolata vicino al suolo.

2.3 Circolazione e vorticità

Consideriamo un insieme di particelle che formino una linea chiusa $\ell(t)$ ad un certo istante nel fluido. Poiché il moto è regolare, tale linea resterà chiusa durante tutto il moto. Definiamo *circolazione* di \mathbf{v} su ℓ nell'istante t l'integrale

$$\oint_{\ell(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Se parametrizziamo la curva $\ell(t)$ con la rappresentazione $\mathbf{x}(s, t)$, $s \in [0, 1]$, $\mathbf{x}(0, t) = \mathbf{x}(1, t)$, segue facilmente che

$$\frac{d}{dt} \oint_{\ell(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) ds = \oint_{\ell(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{x} + \oint_{\ell(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

Considerando che l'ultimo integrale è il differenziale di $v^2/2$ e quindi si annulla lungo una linea chiusa, si ottiene la formula

$$\frac{d}{dt} \oint_{\ell(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\ell(t)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.13)$$

In particolare, si ha il seguente risultato.

Teorema 2.2. (Teorema di Kelvin⁽³⁾) *In un fluido perfetto barotropico sottoposto a forze conservative la circolazione di \mathbf{v} è costante nel tempo.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata se si considera che nelle ipotesi del teorema l'accelerazione è irrotazionale. Infatti, dal Teorema di Stokes⁽⁴⁾ segue

$$\oint_{\ell(t)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S(t)} \text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

dove $S(t)$ è una qualunque superficie regolare aperta di bordo $\ell(t)$. □

Questo risultato ha una conseguenza molto importante.

Teorema 2.3. (Teorema di Lagrange) *Se un fluido perfetto barotropico soggetto a forze conservative è inizialmente in moto irrotazionale, allora esso resterà tale per tutto il tempo.*

In particolare, se il fluido parte dalla quiete allora il moto è sempre irrotazionale.

⁽³⁾William THOMSON (Belfast, 26 giugno 1824 – Netherhall, 17 dicembre 1907) il titolo di Lord Kelvin gli fu conferito per merito delle sue scoperte, e deriva dal fiume Kelvin, che scorre presso la sua università scozzese di Glasgow. Fama e ricchezza gli vennero però dalla sua attività di ingegnere legata all'invenzione e alla costruzione delle reti telegrafiche. Nel 1900 ebbe la sfortuna di affermare: "Adesso non c'è niente di nuovo da scoprire in fisica. Tutto quello che rimane da fare sono misure sempre più precise".

⁽⁴⁾George Gabriel STOKES (Skreen, Irlanda, 13 agosto 1819 – Cambridge, 1 febbraio 1903) fu nominato baronetto per meriti scientifici e fu segretario e successivamente presidente della Royal Society. Stokes comparve anche come testimone nella tragedia del "Tay bridge", dove diede la prova degli effetti del vento sulla struttura; per questo e altri lavori fu nominato membro della Royal Commission che si occupava dell'effetto della pressione esercitata dal vento sulle strutture.

Dimostrazione. Sia $S(t)$ una superficie regolare aperta nel fluido, con bordo connesso $\ell(t)$. Essendo la circolazione costante per il Teorema di Kelvin, ed essendo il moto inizialmente irrotazionale, si ha che la circolazione è nulla. In particolare, applicando il Teorema di Stokes,

$$0 = \oint_{\ell(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S(t)} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Dall'arbitrarietà di S si ottiene $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

Richiamiamo ora alcuni concetti legati alla vorticità $\boldsymbol{\omega}$ di un fluido. Vale la seguente formula, nota come *equazione di diffusione di Beltrami*⁽⁵⁾:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} D\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho} \text{rot } \mathbf{a}, \quad (2.14)$$

dove D è la parte simmetrica di $\text{grad } \mathbf{v}$. Per dimostrarla, partiamo dalla formula (1.17) e prendiamone il rotore di ambo i membri, ricordando anche l'identità (A.24):

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \boldsymbol{\omega})\mathbf{v} - (\text{grad } \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} + (\text{div } \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - (\text{grad } \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} + (\text{div } \mathbf{v})\boldsymbol{\omega}.$$

Dividiamo ora tutto per ρ e usiamo l'equazione di continuità per scrivere $\text{div } \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$, ottenendo

$$\frac{1}{\rho} \text{rot } \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - (\text{grad } \mathbf{v}) \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \boldsymbol{\omega} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) - (\text{grad } \mathbf{v}) \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}.$$

Ricordando poi che $W\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, si ha $(\text{grad } \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} = D\boldsymbol{\omega}$ e la formula è dimostrata. □

In particolare, per un fluido perfetto barotropico soggetto a forze di volume conservative, si ha $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ e dunque vale l'*equazione di Helmholtz*⁽⁶⁾:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} D\boldsymbol{\omega}, \quad (2.15)$$

che governa la propagazione durante il moto della vorticità per unità di massa.

Se poi il moto è piano, ovvero $\mathbf{v} = u(x, y, t)\mathbf{e}_1 + v(x, y, t)\mathbf{e}_2$, si ha che $\boldsymbol{\omega}$ è sempre diretta lungo \mathbf{e}_3 mentre $D_{i3} = 0$, quindi $D\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e dalla (2.15) si ha

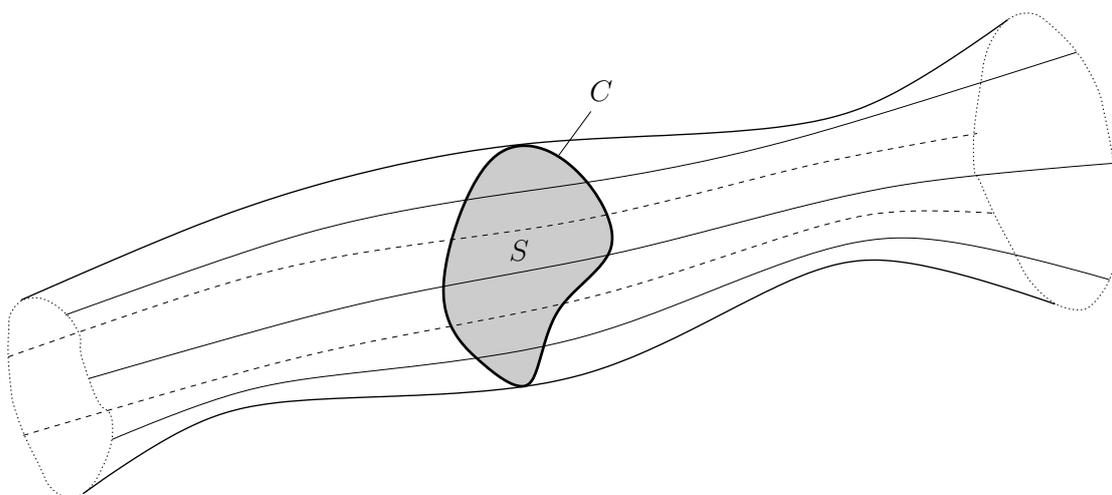
$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}(\mathbf{X}, 0); \quad (2.16)$$

ossia, $\boldsymbol{\omega}/\rho$ è trasportato dal fluido come un campo scalare passivo.

Notiamo che c'è una bella differenza tra la conservazione della vorticità nei moti piani, espressa dall'equazione (2.16), e la sua evoluzione nei moti tridimensionali, espressa dall'equazione di Helmholtz. Infatti in due dimensioni si riesce, proprio grazie a tale conservazione,

⁽⁵⁾Eugenio BELTRAMI (Cremona, 16 novembre 1836 – Roma, 18 febbraio 1900) non riuscì a concludere gli studi universitari per ristrettezze finanziarie e per l'espulsione dal collegio dove si trovava, dovuta alle sue simpatie per il movimento risorgimentale. Divenne tuttavia un matematico importante e docente universitario, lavorando soprattutto nel campo della geometria differenziale e delle sue applicazioni alla fisica.

⁽⁶⁾Hermann VON HELMHOLTZ (Potsdam, 31 agosto 1821 – Berlino-Charlottenburg, 8 settembre 1894) laureato in medicina, medico militare, poi docente di anatomia, fisiologia e patologia, fu uno degli scienziati più poliedrici del suo tempo. Diede contributi fondamentali in fisica, tanto da essere soprannominato *Cancelliere della fisica*.

Figura 2.1: Costruzione di un *vortex tube*.

a stabilire rigorosamente una teoria di esistenza e unicità per l'equazione di Eulero, mentre in tre dimensioni questo è ancora un problema aperto.

Possiamo però ottenere ulteriori informazioni circa la dinamica della vorticità in tre dimensioni. Definiamo *vortex sheet* (risp. *vortex line*) una superficie (risp. una curva) che sia in ogni punto tangente al campo di vorticità $\boldsymbol{\omega}$. Consideriamo una superficie S che sia un *vortex sheet* all'istante $t = 0$; se \mathbf{n} è la normale esterna ad S si ha per definizione $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ per $t = 0$, ma il Teorema di Kelvin implica che

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\ell} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \text{costante},$$

ovvero che il flusso della vorticità sia costante su superfici trasportate da un fluido perfetto barotropico soggetto a forze conservative, e quindi

$$\int_{\varphi(S,t)} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0;$$

possiamo così concludere che ad ogni istante il *vortex sheet* trasportato $\varphi(S,t)$ è ancora un *vortex sheet*. Nei punti dove la vorticità non si annulla, una *vortex line* risulta essere intersezione di due *vortex sheet* e quindi viene anch'essa trasportata dal fluido rimanendo sempre tangente al campo di vorticità.

Introduciamo anche la nozione di *vortex tube*. Data una superficie S diffeomorfa al disco unitario, che non sia tangente a $\boldsymbol{\omega}$ in alcun punto e sia delimitata da una curva chiusa C , un *vortex tube* (Figura 2.1) è la regione di spazio che sta all'interno della superficie formata da tutte le *vortex line* passanti per C . Se assumiamo che $\boldsymbol{\omega}$ non si annulli in alcun punto del *vortex tube*, questo risulta localmente diffeomorfo ad un cilindro.

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema che stabilisce l'esistenza di una quantità costante associata ad ogni *vortex tube*.

Teorema 2.4. (Teorema di Helmholtz) *Consideriamo un fluido perfetto barotropico sottoposto a forze conservative. Se C_1 e C_2 sono due curve chiuse concordemente orientate tracciate*

sulla superficie di un vortex tube, le quali non si intersecano e non sono tangenti in alcun punto alle sue vortex line, allora

$$\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x};$$

tale valore comune alle due curve è detto intensità del vortex tube ed è costante nel tempo.

Dimostrazione. Denotiamo con S_0 la superficie definita dai segmenti di *vortex line* che collegano C_1 e C_2 , con S_1 ed S_2 due superfici che abbiano come bordo C_1 e C_2 rispettivamente e con V il volume contenuto all'interno di $S_0 \cup S_1 \cup S_2$. Poiché $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$, dal Teorema della Divergenza si ha

$$0 = \int_V \text{div } \boldsymbol{\omega} dV = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_0} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS;$$

dato che S_0 è per costruzione un *vortex sheet*, l'ultimo integrale è nullo e, applicando stavolta il Teorema di Stokes, si ottiene

$$\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} - \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0,$$

che è la prima parte della tesi. Il fatto che l'intensità del *vortex tube* sia costante nel tempo discende ora immediatamente dal Teorema di Kelvin. \square

Osserviamo che, secondo quanto affermato dal Teorema di Helmholtz, se l'area della sezione di un *vortex tube* diminuisce, l'intensità di $\boldsymbol{\omega}$ deve aumentare: strizzare un *vortex tube* fa crescere la vorticità, ma essa non può essere generata là dove non è presente. Questa caratteristica dei fluidi perfetti è legata alla conservazione locale del momento angolare, visto che, in assenza di attriti legati alla viscosità, non si dispone di meccanismi per far partire o fermare i moti rotatori.

2.4 Fluidodinamica dei fluidi perfetti barotropici

Veniamo ora al caso dinamico per i fluidi perfetti barotropici, ovvero studiamo la già citata

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{b} - \text{grad } \mathcal{P}. \quad (2.3)$$

Vale il seguente importante teorema, che dà un integrale primo per l'equazione del moto.

Teorema 2.5. (Teorema di Bernoulli⁽⁷⁾) *Sia dato un fluido perfetto barotropico e supponiamo che il campo delle forze di volume \mathbf{b} sia irrotazionale e dunque ammetta un potenziale $-\Psi$. Allora, ponendo*

$$\Gamma = \Psi + \mathcal{P} + \frac{v^2}{2}$$

valgono i seguenti fatti:

⁽⁷⁾Daniel BERNOULLI (Groningen, 29 gennaio 1700 – Basilea, 27 luglio 1782) matematico, figlio di Johann, nipote di Jacob, fratello più giovane di Nicolaus II e più anziano di Johann II, tutti matematici. Daniel Bernoulli è stato descritto come “di gran lunga il più abile dei giovani Bernoulli”.

- (1) se il moto è stazionario, si ha che Γ è costante lungo le linee di corrente;
- (2) se il moto è irrotazionale, esiste un potenziale cinetico $\varphi(\mathbf{x}, t)$ per cui su ogni componente connessa della regione occupata dal fluido si ha

$$\Gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0;$$

- (3) se il moto è stazionario e irrotazionale, su ogni componente connessa la quantità Γ è costante.

Dimostrazione. Sostituendo l'espressione (1.17) dell'accelerazione mediante la vorticità nell'equazione del moto, si ha

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\text{grad}(\Psi + \mathcal{P})$$

da cui

$$\text{grad} \Gamma + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (2.17)$$

Dunque, se il moto è stazionario e irrotazionale si ha $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e quindi $\text{grad} \Gamma = \mathbf{0}$ in tutta la regione, ovvero Γ è costante su ogni componente connessa.

Se il moto è solamente stazionario, moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} si ottiene

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad} \Gamma = 0,$$

ovvero Γ è costante lungo le linee di corrente.

Infine, se il moto è solamente irrotazionale, la vorticità è nulla e dalla (2.17) segue che per ogni potenziale cinetico φ si ha

$$\text{grad} \left(\Gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \mathbf{0},$$

ovvero, ricordando che tutte le quantità possono in generale dipendere dal tempo,

$$\Gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c(t),$$

dove $c(t)$ è una quantità che dipende solo dal tempo. Denotando con $C(t)$ una primitiva di $c(t)$ e ponendo

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\mathbf{x}, t) - C(t),$$

si ha che $\hat{\varphi}$ è ancora un potenziale cinetico e $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - c$, quindi

$$\Gamma + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = 0.$$

Denotando nuovamente con φ la $\hat{\varphi}$, si ha la tesi. □

Un'applicazione immediata di questo teorema è il cosiddetto *tubo di Venturi*⁽⁸⁾⁽⁹⁾, ovvero un tubo in cui scorre un fluido perfetto incompressibile che presenti due sezioni diverse di aree

⁽⁸⁾ Giovanni Battista VENTURI (Bibbiano, 15 marzo 1746 – Reggio Emilia, 24 aprile 1822) fisico, ordinato sacerdote nel 1769. Nel 1797 a Parigi esamina i codici di Leonardo da Vinci, pubblicandone alcuni estratti in un saggio dove per primo mette in evidenza la componente scientifica e tecnologica dell'opera leonardesca.

⁽⁹⁾ LEONARDO (Vinci, 15 aprile 1452 – Amboise, 2 maggio 1519) non necessita di ulteriori parole.

A_1 e A_2 . Se supponiamo il moto stazionario e la velocità ortogonale alle sezioni, dall'equazione di continuità segue (con ovvie notazioni)

$$v_1 A_1 = v_2 A_2.$$

Se poi imponiamo il moto irrotazionale e trascuriamo le forze esterne, dal Teorema di Bernoulli segue

$$\frac{p_1}{\rho_0} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_0} + \frac{v_2^2}{2}$$

che fornisce una relazione fra velocità e pressione. Se ad esempio v_1 e p_1 sono noti, si ottiene

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho_0}{2}(v_1^2 - v_2^2) = p_1 + \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2} \right) v_1^2.$$

2.4.1 Svuotamento di una vasca

Una semplice applicazione del Teorema di Bernoulli è la seguente. Supponiamo di avere una vasca contenente un fluido perfetto incomprimibile in moto irrotazionale (o in quiete). Supponiamo poi che tale fluido sia sottoposto all'azione della forza peso, che la velocità al pelo libero sia verticale e che ci sia sul fondo un foro di uscita, che per convenzione poniamo ad altezza $z = 0$. Infine ipotizziamo che la velocità con cui si abbassa la quota del fluido sia trascurabile rispetto alla velocità di uscita e che il moto si possa supporre stazionario. Denotando con ρ la densità del fluido, con p_0, p la pressione rispettivamente al foro di uscita e al pelo libero del fluido, con v_0 il modulo della velocità di uscita e con z la quota del pelo libero, dal Teorema di Bernoulli abbiamo

$$gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

da cui si può ricavare v_0 una volta note p_0, p, ρ, z .

Se invece vogliamo considerare anche la perdita di quota del fluido, mettiamoci nel caso in cui la vasca sia prismatica di superficie di base A . Denotiamo con A_0 la superficie del foro di uscita e poniamo $k = A/A_0$, con $k > 1$. Se $h(t)$ denota la quota del pelo libero, lì la velocità sarà uguale a $h'(t)$. Applicando l'equazione di continuità $\text{div } \mathbf{v} = 0$ a tutta la vasca, si ottiene

$$A_0 v_0 = A h'$$

da cui $v_0(t) = -k h'(t)$. Supponendo che $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ sia piccola (approssimazione quasi-stazionaria) possiamo pensare che il moto sia stazionario; se studiamo di nuovo il caso in cui $p = p_0$, l'equazione di Bernoulli (nel caso stazionario e irrotazionale) diventa

$$gh(t) + \frac{h'^2}{2} = \frac{k^2 h'^2}{2},$$

ovvero

$$h'(t)^2 - \frac{2g}{k^2 - 1} h(t) = 0.$$

Poiché nelle nostre condizioni la quota del pelo libero decresce, deve essere $h' \leq 0$. Se mettiamo la condizione iniziale $h(0) = \hat{h}$, possiamo risolvere il problema di Cauchy ottenendo

$$h(t) = \left(\sqrt{\hat{h}} - \frac{t}{2} \sqrt{\frac{2g}{k^2 - 1}} \right)^2 = \hat{h} - t \sqrt{\frac{2g\hat{h}}{k^2 - 1}} + \frac{g}{2(k^2 - 1)} t^2,$$

ovvero l'andamento della quota è parabolico nel tempo. In particolare, il tempo di svuotamento è

$$t_* = \sqrt{\frac{2(k^2 - 1)\hat{h}}{g}}.$$

Se infine consideriamo anche il caso in cui le pressioni al pelo e all'uscita siano diverse, riprendendo l'equazione di Bernoulli abbiamo

$$gh(t) + \frac{p}{\rho} + \frac{h'^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{k^2 h'^2}{2},$$

da cui

$$h'(t)^2 = \frac{2g}{k^2 - 1} h(t) - \frac{2(p_0 - p)}{\rho(k^2 - 1)}.$$

Supponendo $p \leq p_0$ e ponendo

$$h^* = \frac{p_0 - p}{\rho g}, \quad d(t) = h(t) - h^*,$$

si ottiene l'equazione $d'(t)^2 - \frac{2g}{k^2 - 1} d(t) = 0$ e quindi si avrà uno svuotamento solo fino al livello h^* in un tempo

$$t_* = \sqrt{\frac{2(k^2 - 1)(\hat{h} - h^*)}{g}}.$$

2.5 Onde di gravità

La superficie libera di un fluido in equilibrio sotto l'azione della forza peso è un piano; se tale superficie è mossa da una perturbazione, al cessare di questa si genera un moto nel fluido che si propaga sotto forma di onde, che sono dette *onde di gravità* perché dovute all'azione del campo gravitazionale.

Considereremo qui onde in cui la velocità del fluido è sufficientemente piccola da poter trascurare il termine non lineare $(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}$ nell'equazione di Eulero. Il significato fisico di tale approssimazione si può cogliere dalle seguenti osservazioni. Durante un intervallo di tempo dell'ordine del periodo di oscillazione T dell'onda, le particelle di fluido percorrono una distanza dell'ordine dell'ampiezza A dell'onda, con velocità media V che risulta quindi dell'ordine di A/T . La velocità effettiva varia notevolmente su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda λ e su scale temporali dell'ordine di T ; quindi la derivata temporale della velocità è dell'ordine di V/T , mentre le derivate spaziali sono dell'ordine di V/λ . Allora la condizione

$$|(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|$$

equivale a

$$\frac{A^2}{\lambda T^2} \ll \frac{A}{T^2}, \quad \text{ossia} \quad A \ll \lambda;$$

perciò il termine non lineare può essere trascurato se l'ampiezza dell'onda è piccola rispetto alla sua lunghezza.

Sotto queste ipotesi l'equazione di Eulero per un fluido barotropico soggetto a forze conservative con potenziale $-\Psi$ diventa

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad}(\mathcal{P} + \Psi);$$

applicando il rotore ad entrambi i membri dell'equazione si ha immediatamente che la vorticità $\boldsymbol{\omega}$ è costante, ma, trattandosi di un moto oscillatorio, la velocità ha media temporale nulla e quindi necessariamente $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

Possiamo quindi applicare il Teorema di Bernoulli nel caso di moto irrotazionale, ma non stazionario, ottenendo che esiste un potenziale cinetico $\varphi(\mathbf{x}, t)$ tale che

$$\frac{p}{\rho_0} + gz + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (2.18)$$

dove ρ_0 è la densità del fluido supposto incompressibile e abbiamo già scritto il potenziale della forza peso e scelto un sistema di riferimento con il piano xy corrispondente alla posizione di equilibrio della superficie del fluido e l'asse z che punta verso l'alto.

2.5.1 Onde di acqua alta

Studiamo ora il caso delle cosiddette onde di acqua alta (o trocoidali, o di Gerstner⁽¹⁰⁾), ponendo $\mathbf{v} = ue_1 + ve_2 + we_3$.

Poiché siamo nel caso di un fluido incomprimibile in moto irrotazionale, con potenziale cinetico tale che $\text{grad } \varphi = \mathbf{v}$, dall'equazione di continuità si ha subito che deve valere

$$\Delta\varphi = 0 \quad (2.19)$$

nella regione occupata dal fluido.

Ci occupiamo ora di esprimere le condizioni al contorno. Supponiamo che niente dipenda da y . Denotiamo con $\eta(x, t)$ la funzione che descrive la quota z dei punti sulla superficie libera del fluido. Sulla base di considerazioni dimensionali analoghe alle precedenti trascuriamo il termine $|\mathbf{v}|^2/2$ nell'equazione (2.18) e scriviamola sulla superficie libera $z = \eta(x, t)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, \eta(x, t), t) + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_0} + g\eta(x, t) = 0.$$

Derivando rispetto al tempo questa equazione e tenendo conto che p_{atm}/ρ_0 è costante otteniamo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z}(x, \eta(x, t), t) \frac{\partial\eta}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x, \eta(x, t), t) + g \frac{\partial\eta}{\partial t}(x, t) = 0.$$

Linearizzando anche questa equazione, cioè trascurando il primo termine, troviamo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x, \eta(x, t), t) + g \frac{\partial\eta}{\partial t}(x, t) = 0. \quad (2.20)$$

Scriviamo poi la condizione cinematica della superficie libera:

$$z = \eta(x, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} + u \frac{\partial\eta}{\partial x} - w = 0$$

ed effettuiamo di nuovo l'ipotesi di linearizzazione, ovvero trascuriamo $u \frac{\partial\eta}{\partial x}$. Segue

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}(x, t) = w(x, \eta, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, \eta, t). \quad (2.21)$$

Sostituendo questa formula nella (2.20) si ottiene

$$\forall x, t: \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x, \eta, t) + g \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, \eta, t) = 0 \quad (2.22)$$

che è la condizione al bordo per il pelo libero.

Per quanto riguarda il fondo del canale consideriamo due casi:

- (1) il fondo è a una profondità finita $z = -h$; in questo caso la condizione cinematica $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ fornisce $w(x, -h, t) = 0$, ovvero

$$\forall x, t: \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, -h, t) = 0; \quad (2.23)$$

⁽¹⁰⁾František Josef GERSTNER (Chomutov, 23 febbraio 1756 – Mladějov, 25 luglio 1832) professore di matematica a Praga dal 1789 al 1823, il suo famoso articolo *Theorie der Wellen* fu pubblicato nel 1802 sugli *Abhandlungen der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*. Favorì la costruzione delle prime macchine a vapore in Boemia e, nel 1807, suggerì la costruzione di una ferrovia a tiro di cavalli tra Česká Budějovice e Linz che fu realizzata tra il 1827 e il 1829.

(2) il fondo è a una profondità infinita, dunque imponiamo

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z, t) = 0. \quad (2.24)$$

In ogni caso, il problema [(2.19), (2.22), (2.23)] o [(2.19), (2.22), (2.24)] è un problema ai valori al contorno lineare e omogeneo.

Di questo problema cercheremo delle soluzioni ondulatorie particolari del tipo

$$\varphi(x, z, t) = \xi(z) \cos m(x - ct) \quad (2.25)$$

dove $m > 0$ è il numero d'onda $2\pi/\lambda$ (λ lunghezza dell'onda) e $c > 0$ è la velocità dell'onda. Imponendo che (2.25) sia soluzione di (2.19) si ha subito

$$\xi'' - m^2 \xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi(z) = Ae^{mz} + Be^{-mz}$$

con A, B costanti. Nel caso di profondità finita la (2.23) fornisce

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, -h, t) = \left(mAe^{-mh} - mBe^{mh} \right) \cos m(x - ct)$$

per ogni x, t , da cui

$$\frac{C}{2} \stackrel{\text{def}}{=} Ae^{-mh} = Be^{mh}$$

e dunque

$$\varphi(x, z, t) = C \cosh m(z + h) \cos m(x - ct).$$

Poiché

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -Cm^2 c^2 \cosh m(z + h) \cos m(x - ct), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = Cm \sinh m(z + h) \cos m(x - ct),$$

se ora imponiamo la condizione (2.22) sulla superficie libera $z = \eta$ otteniamo

$$-mc^2 \cosh m(\eta + h) + g \sinh m(\eta + h) = 0.$$

Se poi effettuiamo l'approssimazione $\eta(x, t) \ll h$, si trova

$$c^2 = \frac{g}{m} \tanh mh. \quad (2.26)$$

In particolare, la velocità dell'onda non dipende soltanto dalla profondità h ma anche dal numero d'onda. Scrivendo tale relazione in funzione della lunghezza d'onda si ottiene la relazione di dispersione (nota anche in Ottica)

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}$$

in cui si vede che la velocità dell'onda aumenta con la sua lunghezza. Dalla (2.20) possiamo anche ricavare il profilo del pelo libero: tenendo conto che $\eta + h \sim h$ e vale la nota formula $2 \sinh x \cosh x = \sinh 2x$, si ha

$$\eta(x, t) = -C \frac{mc}{g} \cosh mh \sin m(x - ct) = -C \sqrt{\frac{m}{2g}} \sinh 2mh \sin m(x - ct).$$

Se invece imponiamo la condizione (2.24) si ha subito $B = 0$ e dunque

$$\varphi(x, z, t) = Ae^{mz} \cos m(x - ct)$$

da cui, andando a imporre di nuovo la condizione sul pelo libero, si trova

$$c^2 = \frac{g}{m} = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Anche in questo caso sono possibili onde di frequenza diversa e vale una relazione di dispersione.

Osserviamo che il precedente risultato si può trovare anche passando al limite per $h \rightarrow +\infty$ nella (2.26). Al contrario, se si suppone h piccolo, si ha l'approssimazione

$$\tanh mh \sim mh$$

e dunque la (2.26) diventa $c^2 = gh$, che è la relazione che otterremo per le onde di canale. In questo senso si parla di onde di acqua bassa per quel tipo di onde.

2.5.2 Onde di canale

Studiamo ora il caso delle onde di canale (o di acqua bassa, o lunghe, o di Airy⁽¹¹⁾); la particolarità di questo modello è quella di supporre piccola l'accelerazione verticale. Immaginiamo di avere un fluido perfetto incomprimibile (acqua) che scorre in un canale a sezione rettangolare, sottoposto all'azione della forza peso. Supponiamo che niente dipenda dalla componente y , ovvero che, se $\mathbf{v} = ue_1 + ve_2 + we_3$, debba essere

$$v = 0, \quad u = u(x, z, t), \quad w = w(x, z, t).$$

Supponiamo poi che il pelo libero del fluido, all'equilibrio, stia nel piano $z = 0$ e che il fondo del canale stia nel piano $z = -h$. Inoltre supponiamo che la condizione iniziale per u sia funzione solo di x , ovvero

$$u(x, z, 0) = u_0(x),$$

e che sul pelo libero del fluido la pressione sia costantemente uguale alla pressione atmosferica p_{atm} . Vogliamo trovare la velocità e il profilo del pelo libero.

Nell'equazione di Eulero

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{e}_3 - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p$$

enucleiamo la terza componente:

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Prima approssimazione: supporremo trascurabile l'accelerazione verticale, ovvero

$$-g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

⁽¹¹⁾George Biddell AIRY (Alnwick, 27 luglio 1801 – Greenwich, 2 gennaio 1892) astronomo inglese, nel 1835 divenne il settimo astronomo reale, conservando la carica fino al 1881. Alla sua nomina trovò l'Osservatorio Reale di Greenwich in uno stato di notevole disordine e inefficienza, e lo trasformò in uno dei migliori osservatori del mondo attraverso una rigida applicazione di norme molto severe.

da cui

$$p(x, z, t) = -\rho_0(gz + C(x, t))$$

dove $C(x, t)$ è una funzione arbitraria. Se denotiamo con $z = \eta(x, t)$ la funzione che dà il pelo libero del fluido (supponendo che esso si possa rappresentare come funzione), e se imponiamo la condizione della pressione sul pelo libero, si ottiene

$$p_{\text{atm}} = p(x, \eta, t) = -\rho_0(g\eta + C(x, t))$$

e dunque

$$p(x, z, t) = p_{\text{atm}} + \rho_0g(\eta(x, t) - z).$$

In particolare,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

e dunque $\frac{\partial p}{\partial x}$ non dipende da z . Poiché dalla prima componente dell'equazione di Eulero si ha

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.27)$$

neppure $\frac{du}{dt}$ può dipendere da z . Per la condizione iniziale su u risulta quindi che u non dipenderà da z per ogni t . In particolare, possiamo riscrivere la (2.27) come

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

La seconda approssimazione consiste nel linearizzare l'equazione precedente, ovvero nel supporre trascurabile la quantità $u \frac{\partial u}{\partial x}$ rispetto a $\frac{\partial u}{\partial t}$. In questo modo si giunge a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (2.28)$$

Consideriamo ora l'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Visto che $\frac{\partial u}{\partial x}$ non dipende da z , si avrà che neppure $\frac{\partial w}{\partial z}$ dipende da z , dunque w è lineare in z :

$$w(x, z, t) = -z \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)$$

dove al solito $c(x, t)$ è funzione arbitraria. Poiché la condizione al bordo sul fondo del canale implica che $w(x, -h, t) = 0$ per ogni x, t , deve essere $c(x, t) = -h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ e dunque

$$w(x, z, t) = -(z + h) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Sia ora $F(x, z, t) = z - \eta(x, t)$. Si ha banalmente che il pelo libero è descritto da $F = 0$ e dunque per la Proposizione 1.2 deve essere $\frac{dF}{dt}(x, \eta, t) = 0$, da cui

$$z = \eta \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}(\eta + h) = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u(\eta + h)}{\partial x}.$$

A questo punto interviene la terza approssimazione: $\eta \ll h$, ovvero le variazioni di quota del pelo libero siano trascurabili rispetto alla profondità del canale. In questo modo la precedente equazione diventa

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.29)$$

Unendo la (2.28) con la (2.29), si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

che porta facilmente alle equazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

Quindi sia la u che la η risolvono l'equazione delle onde omogenea. In particolare, ponendo $c = \sqrt{gh}$,

$$u(x, t) = a(x - ct) + b(x + ct), \quad \eta(x, t) = d(x - ct) + e(x + ct),$$

dove a, b, d, e sono funzioni di classe C^2 legate dalle relazioni

$$-\sqrt{h}a' + \sqrt{g}d' = 0, \quad \sqrt{h}b' + \sqrt{g}e' = 0.$$

La cosa più interessante è che la velocità di tali onde è fissa e dipende solo dalla profondità del canale.

Dalla soluzione per u si ricava poi

$$w(x, z, t) = -(z + h)[a'(x - ct) + b'(x + ct)].$$

2.6 Moti piani incomprimibili

Consideriamo un fluido perfetto incomprimibile soggetto a forze conservative ed esaminiamo il caso in cui il campo di velocità sia stazionario e piano, ovvero

$$\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{e}_1 + v(x, y)\mathbf{e}_2.$$

Sotto queste ipotesi, dall'equazione di Helmholtz discende che la vorticità è costante e diretta lungo \mathbf{e}_3 , dunque $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$ con ω costante. Dalla definizione di vorticità segue

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega.$$

Inoltre l'equazione di continuità si scrive

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

che equivale a dire che il campo vettoriale $-v\mathbf{e}_1 + u\mathbf{e}_2$ è conservativo. Ma allora, se pensiamo di porci su un dominio semplicemente connesso, esiste un potenziale scalare ψ tale che

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

Tale potenziale prende il nome di *funzione di corrente* e si ha

$$\Delta\psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{div}(-v\mathbf{e}_1 + u\mathbf{e}_2) = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\omega$$

e dunque il laplaciano di ψ è costante. Si ha che le curve di livello di ψ sono le linee di corrente, infatti

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \psi = -uv + uv = 0$$

e dunque le curve di livello di ψ sono parallele a \mathbf{v} .

Se poi supponiamo che il moto sia irrotazionale, allora esiste il potenziale cinetico φ tale che $\operatorname{grad} \varphi = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$ e l'incomprimibilità implica

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

Anche $\omega = 0$, quindi sia il potenziale cinetico che la funzione di corrente sono armoniche. Inoltre si ha che $\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi = 0$ in ogni punto, e dunque le linee di livello di φ e di ψ sono mutuamente ortogonali in ogni punto.

Se poi si identifica il piano col campo complesso \mathbb{C} e si definisce la funzione

$$f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

è immediato verificare che tale funzione è olomorfa e dunque può essere applicata, ad esempio, la teoria dello sviluppo in serie di Laurent⁽¹²⁾ o il metodo dei residui di Cauchy. Notiamo in particolare che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u - iv, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \sqrt{u^2 + v^2} = |\mathbf{v}|.$$

La quantità $F \stackrel{\text{def}}{=} u - iv$ viene chiamata *velocità complessa*.

2.6.1 Esempi

Un'idea per studiare qualitativamente il caso dei moto piani incomprimibili è quella di farsi un campionario di come sono fatte le curve di livello della parte reale e immaginaria di qualche funzione f olomorfa semplice: siccome poi la somma di funzioni olomorfe è ancora olomorfa, potremo sovrapporre tra loro gli elementi di questo campionario essenziale per ottenere nuove soluzioni. Ovviamente, dato un problema particolare, l'obiettivo sarà quello di costruire una soluzione che soddisfi le condizioni al contorno di quel problema; in questo modo potremo dire che quella è *la* soluzione del problema.

Insomma: vogliamo studiare qualche funzione olomorfa elementare. I casi che esamineremo non sono molti: ci sono i polinomi complessi di primo e secondo grado, il logaritmo complesso, la funzione $1/z$.

1) $f(z) = kz$, con $k \in \mathbb{C}$.

Scrivendo $z = x + iy$ e $k = a + ib$ e sviluppando i prodotti si ha

$$f(x, y) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

⁽¹²⁾Pierre Alphonse LAURENT (Parigi, 18 luglio 1813 – Parigi, 2 settembre 1854) ufficiale dell'esercito ed ingegnere, partecipò alla conquista dell'Algeria. Tornato in Francia, fu impegnato nel rinnovo del porto di Le Havre, che da allora divenne il principale porto del nord della Francia.

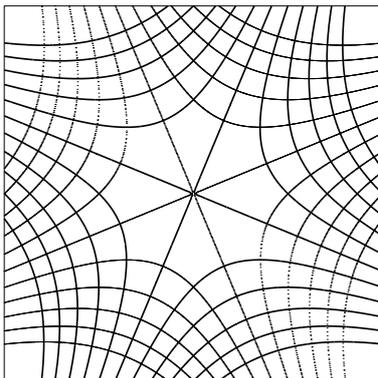


Figura 2.2: Linee di corrente ed equipotenziali nel caso $f(z) = (1+i)z^2$.

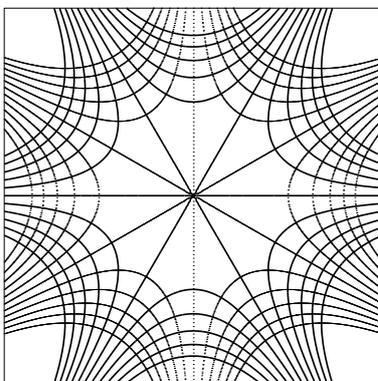


Figura 2.3: Linee di corrente ed equipotenziali nel caso $f(z) = z^3$.

e dunque $\varphi(x, y) = ax - by$ e $\psi(x, y) = bx + ay$. Le linee di corrente sono rette parallele e le linee equipotenziali pure. Si ha un moto rettilineo uniforme delle particelle.

2) $f(z) = kz^2$, con $k \in \mathbb{C}$.

Sviluppando i prodotti si ha

$$f(x, y) = (a(x^2 - y^2) - 2bxy) + i[b(x^2 - y^2) + 2axy].$$

Le linee di corrente e le linee equipotenziali sono delle iperboli equilateri (eventualmente ruotate). Si veda la Figura 2.2.

3) $f(z) = kz^n$, con $k \in \mathbb{C}$.

Conviene usare le coordinate polari (e porre $k = 1$):

$$z^n = \rho^n e^{in\vartheta} = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)).$$

Le linee di corrente sono le curve $\rho^n \sin(n\vartheta) = \text{costante}$, che rappresentano un fluido che si muove tra due pareti rettilinee che formano un angolo di π/n (Figura 2.3).

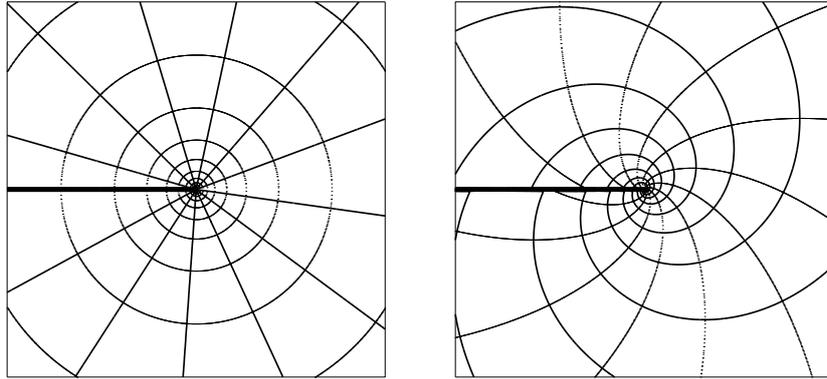


Figura 2.4: Linee di corrente ed equipotenziali nel caso $f(z) = \log(z)$ e $f(z) = (1 + 2i) \log(z)$.

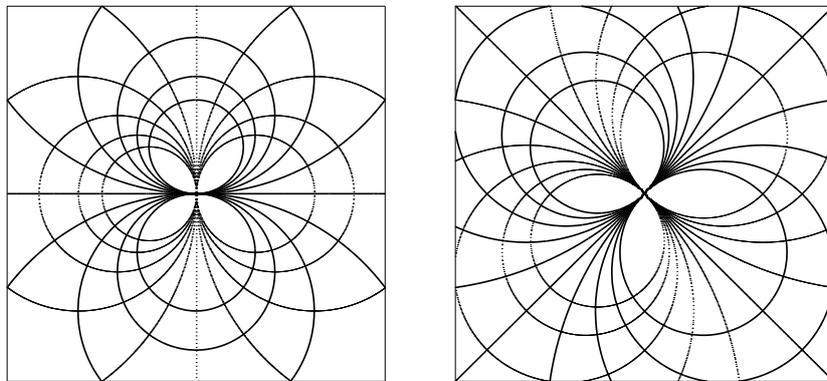


Figura 2.5: Linee di corrente ed equipotenziali nel caso $f(z) = 1/z$ e $f(z) = (1 + i)/z$.

4) $f(z) = k \log(z)$, con $k \in \mathbb{C}$.

Anche qui, ponendo $k = ae^{ib}$ e $z = \rho e^{i\vartheta}$ si ha

$$f(z) = a(\cos b + i \sin b)(\log \rho + i\vartheta) = a(\cos b \log \rho - \vartheta \sin b) + ia(\sin b \log \rho + \vartheta \cos b)$$

e dunque

$$\varphi(\rho, \vartheta) = a(\cos b \log \rho - \vartheta \sin b), \quad \psi(\rho, \vartheta) = a(\sin b \log \rho + \vartheta \cos b).$$

Le linee di corrente sono spirali logaritmiche centrate nell'origine. Nel caso $b = 0$ le linee di corrente diventano semirette che partono dall'origine (Figura 2.4).

5) $f(z) = \frac{k}{z}$, con $k \in \mathbb{C}$.

Si ha subito

$$\varphi(x, y) = \frac{ax + by}{x^2 + y^2}, \quad \psi(x, y) = \frac{bx - ay}{x^2 + y^2},$$

quindi le linee di corrente sono circonferenze tangenti alla retta $bx = ay$ e le linee equipotenziali circonferenze tangenti alla retta $ax = -by$ (Figura 2.5).



Figura 2.6: Linee di corrente ed equipotenziali nel caso $f(z) = z + 1/z$.

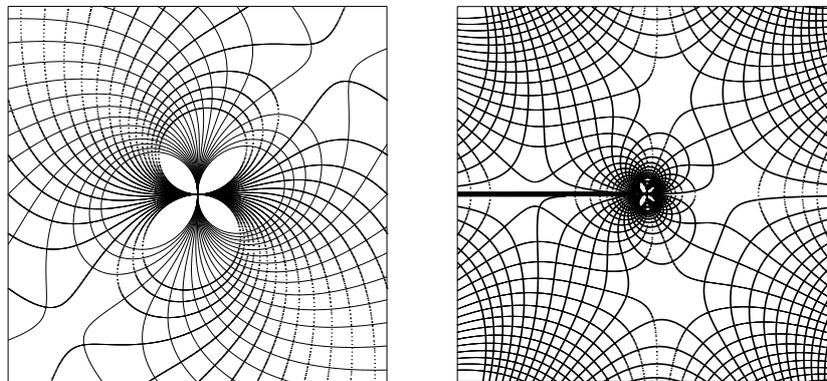


Figura 2.7: Caso $f(z) = z + i/z$ e $f(z) = z^3 + 1/z + \log(z)$.

I moti trovati, grazie alla linearità delle funzioni olomorfe, possono anche essere sovrapposti, come si vede nel prossimo esempio.

6) $f(z) = z + \frac{R^2}{z}$ con $R \in \mathbb{R}$.

Si ha

$$f(x, y) = x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) + iy \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Le linee di corrente sono delle cubiche, delle quali una si fattorizza in una circonferenza di raggio R e una retta orizzontale per il suo centro (Figura 2.6).

Naturalmente, i moti possono essere sovrapposti anche in modo ben più complicato, come si vede nella figura 2.7.

2.6.2 Il teorema di Kutta-Joukowski

In questa sezione vogliamo stabilire una formula per la forza percepita da un corpo immerso in un fluido perfetto incompressibile in moto piano stazionario e irrotazionale. Discuteremo poi

alcune importanti conseguenze di tale formula tra cui il Teorema di Kutta-Joukowski.⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾ Sappiamo già che il fluido può agire sul corpo immerso soltanto attraverso la pressione e potremmo esprimere la forza cercata in funzione di questa, ma il seguente teorema permette di esprimere tale forza in funzione della velocità complessa precedentemente introdotta.

Teorema 2.6. (Teorema di Blasius⁽¹⁵⁾) *Dato un moto piano incomprimibile e irrotazionale con velocità complessa $F = u - iv$ nella regione di piano esterna ad un corpo B con frontiera rigida, la forza \mathcal{F} sul corpo è data da*

$$\mathcal{F} = \frac{\rho_0}{2i} \overline{\left[\int_{\partial B} F^2 dz \right]}, \quad (2.30)$$

dove la barra indica il complesso coniugato e dove il vettore \mathcal{F} è identificato con un numero complesso nel modo usuale.

Dimostrazione. Partiamo dall'espressione della forza in funzione della pressione e traduciamola sul piano complesso:

$$\mathcal{F} = - \int_{\partial B} p \mathbf{n} dl = i \int_{\partial B} p dz,$$

dato che, se $dz = dx + i dy$ rappresenta uno spostamento infinitesimo lungo ∂B , uno spostamento infinitesimo normale (esterno) è rappresentato da $-i dz$. Dal Teorema di Bernoulli si ha $p = -\rho_0(u^2 + v^2)/2$: possiamo mettere a zero la costante del Teorema, poiché l'integrale in dz di una costante su una curva chiusa è certamente nullo. Dalla definizione di velocità complessa si ha $F^2 = u^2 - v^2 - 2iuv$ e, poiché la velocità è parallela a ∂B , si ha $udy = vdx$. In questo modo si ottiene

$$F^2 dz = (u^2 - v^2 - 2iuv)(dx + idy) = (u^2 + v^2)(dx - idy),$$

ed infine

$$\mathcal{F} = i \int_{\partial B} p dz = \frac{\rho_0}{2i} \int_{\partial B} (u^2 + v^2) dz = \frac{\rho_0}{2i} \int_{\partial B} \overline{F^2} dz.$$

□

Utilizzeremo ora questa formula per dimostrare il risultato centrale di questa sezione.

Teorema 2.7. (Teorema di Kutta-Joukowski) *Sia dato un moto piano stazionario, incomprimibile ed irrotazionale nella regione di spazio esterna ad un corpo B con frontiera rigida. Supponiamo che il campo di velocità all'infinito tenda al valore costante $\mathbf{U} = (U, V)$. Allora la forza esercitata su B è data da*

$$\mathcal{F} = -\rho_0 \Gamma_{\partial B} |\mathbf{U}| \mathbf{n}, \quad (2.31)$$

dove $\Gamma_{\partial B}$ è la circolazione di \mathbf{v} attorno a B ed \mathbf{n} è il versore ortogonale a \mathbf{U} .

Dimostrazione. Per ipotesi la velocità complessa F è una funzione analitica all'esterno della regione B , in cui fissiamo l'origine sistema di riferimento; quindi possiamo espanderla in serie di Laurent, ma, ricordando che all'infinito tende ad una costante, si ha

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k},$$

⁽¹³⁾Martin Wilhelm KUTTA (Byczyna, 3 novembre 1867 – Fürstfeldbruck, 25 dicembre 1944) matematico appassionato, si lasciò affascinare dai primi velivoli e applicò quindi le proprie conoscenze all'aerodinamica con importanti risultati. Un'altra sua passione fu lo studio e la mappatura dei ghiacciai alpini.

⁽¹⁴⁾Nikolaj Egorovič ŽUKOVSKIJ (Orehovo, 17 gennaio 1847 – Mosca, 17 marzo 1921) padre fondatore della moderna aerodinamica, mentre gli scienziati a lui contemporanei dubitavano del volo umano, fu il primo ingegnere a spiegare matematicamente la portanza aerodinamica di un corpo che si muove attraverso un fluido ideale. Fondò il primo istituto accademico mondiale di aerodinamica nel 1904 a Kachino, vicino a Mosca, e costruì la prima galleria del vento in Russia.

⁽¹⁵⁾Paul Richard Heinrich BLASIUS (Berlino, 9 agosto 1883 – Amburgo, 24 aprile 1970) ingegnere nel campo della fluidodinamica, pur contribuendo attivamente alla ricerca, si dedicò moltissimo all'attività didattica, insegnando fino all'età di 86 anni.

dove non compaiono potenze positive di z . Poiché \mathbf{U} è la velocità all'infinito $a_0 = U - iV$. Per il Teorema dei Residui di Cauchy

$$\int_{\partial B} F dz = 2\pi i a_1,$$

ma d'altra parte, essendo \mathbf{v} parallela a ∂B ,

$$\int_{\partial B} F dz = \int_{\partial B} (u - iv)(dx + idy) = \int_{\partial B} (udx + vdy) = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \Gamma_{\partial B},$$

e quindi $2\pi i a_1 = \Gamma_{\partial B}$. Calcoliamo ora i primi termini dell'espansione di F^2 :

$$F^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 z^{-1} + (2a_0 a_2 + a_1^2) z^{-2} + \dots$$

Applicando il Teorema di Blasius ed il Teorema dei Residui, otteniamo

$$\mathcal{F} = \frac{\rho_0}{2i} \left[\int_{\partial B} F^2 dz \right] = \mathcal{F} = \frac{\rho_0}{2i} \overline{(4\pi i a_0 a_1)} = \rho_0 \Gamma_{\partial B} (-i\bar{a}_0) = \rho_0 \Gamma_{\partial B} (V - iU),$$

da cui la tesi, dato che $(V - iU) = |\mathbf{U}| \mathbf{n}$. □

Notiamo che la forza esercitata sul corpo B dal fluido è ortogonale alla direzione del flusso, quindi non si ha alcun trascinarsi, e, se la circolazione di \mathbf{v} intorno a B è nulla, non si ha proprio alcuna forza! Questo risultato, noto come *paradosso di d'Alembert*⁽¹⁶⁾, è in aperto contrasto con l'intuizione e l'esperienza, ma nasce dal fatto di aver trascurato gli effetti della viscosità che, in natura, non sono mai completamente assenti.

2.7 Onde acustiche di piccola ampiezza

Ci proponiamo di trovare le perturbazioni rispetto all'equilibrio di un fluido perfetto barotropico in assenza di forze esterne. Supponiamo che la funzione di barotropicità $\rho = f(p)$ sia strettamente crescente, in modo che si possa esprimere la pressione in funzione della densità: $p = p(\rho)$. Si noti che questo esclude certamente il caso dei fluidi incompressibili. Siano p_0, ρ_0 i valori di equilibrio per la pressione e la densità, e poniamo

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} p(\mathbf{x}, t) - p_0, \quad \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0.$$

Come prima ipotesi semplificativa, linearizziamo la funzione di barotropicità $p = p(\rho)$ attorno alla posizione di equilibrio (p_0, ρ_0) , ottenendo

$$p - p_0 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)(\rho - \rho_0)$$

e poniamo $c_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)$, il quadrato della cosiddetta *velocità del suono* corrispondente alla densità ρ_0 . Grazie alle posizioni precedenti abbiamo dunque

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \tag{2.32}$$

⁽¹⁶⁾ Jean-Baptiste Le Rond D'ALEMBERT (Parigi, 16 novembre 1717 – Parigi, 29 ottobre 1783) enciclopedista, matematico, fisico, filosofo ed astronomo francese, tra i più importanti protagonisti dell'Illuminismo. Frutto di un amore illegittimo tra una marchesa e un generale d'artiglieria, il padre ne curò segretamente l'istruzione garantendogli una rendita. Nonostante i suoi enormi contributi nei campi della matematica e della fisica, d'Alembert è famoso anche per aver ipotizzato erroneamente che la probabilità che il lancio di una moneta dia testa aumenta per ciascuna volta che il lancio dà come risultato croce. Nel gioco d'azzardo, la strategia di diminuire la puntata all'aumento delle vincite e di aumentare la puntata all'aumento delle perdite è perciò chiamata *sistema d'Alembert*.

Quindi $\text{grad } \tilde{p} = c_0^2 \text{grad } \tilde{\rho}$ e l'equazione di Eulero e di continuità diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{c_0^2}{\tilde{\rho} + \rho_0} \text{grad } \tilde{\rho} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{grad } \tilde{\rho} \cdot \mathbf{v} + (\tilde{\rho} + \rho_0) \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Inoltre effettuiamo le ipotesi di linearizzazione

$$|(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|, \quad |\text{grad } \tilde{\rho} \cdot \mathbf{v}| \ll \left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \right|, \quad |\tilde{\rho}| \ll \rho_0,$$

iservandoci di capirne il significato a posteriori. Otteniamo quindi il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \text{grad } \tilde{\rho} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Caso unidimensionale

Affrontiamo prima il caso in cui le quantità dipendano solo da x e $\mathbf{v} = u(x, t)\mathbf{e}_1$. Le ipotesi di linearizzazione diventano

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|, \quad \left| u \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \right|, \quad |\tilde{\rho}| \ll \rho_0.$$

e il sistema (2.33) si scrive

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

nelle incognite $u, \tilde{\rho}$. Derivando la prima equazione rispetto a t e la seconda rispetto a x si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Se invece deriviamo la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t abbiamo

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} = 0.$$

Quindi u e $\tilde{\rho}$ soddisfano l'equazione delle onde omogenea unidimensionale con velocità c_0 , e la soluzione generale del sistema si scrive

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \quad \tilde{\rho}(x, t) = h(x - c_0 t) + k(x + c_0 t),$$

dove f, g, h, k sono funzioni di classe C^2 che devono essere trovate mediante le condizioni iniziali.⁽¹⁷⁾ Osserviamo che, se si considera solo la parte progressiva dell'onda $u = f(x - c_0 t)$,

⁽¹⁷⁾Imponendo le condizioni iniziali $u(x, 0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ si trova la soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - c_0 t) + u_0(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} [-U_1(x - c_0 t) + U_1(x + c_0 t)]$$

dove U_1 è una primitiva di u_1 . In modo simile si può procedere per $\tilde{\rho}$.

si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - c_0 t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c_0 f'(x - c_0 t)$$

e dunque l'approssimazione $|u \frac{\partial u}{\partial x}| \ll |\frac{\partial u}{\partial t}|$ significa che $|u|$ deve essere piccola rispetto a c_0 , ovvero la velocità del fluido deve essere bassa rispetto a quella del suono affinché abbia senso la linearizzazione del sistema.

Caso tridimensionale

Nel caso generale ripartiamo dal sistema lineare (2.33)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \text{grad } \tilde{\rho} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

e stavolta prendiamo la divergenza della prima equazione:

$$\frac{\partial \text{div } \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \Delta \tilde{\rho} = 0.$$

Ricavando $\text{div } \mathbf{v}$ dalla seconda equazione

$$\text{div } \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}$$

e sostituendolo nell'equazione sopra, troviamo

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \Delta \tilde{\rho} = 0,$$

da cui

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \tilde{\rho} = 0,$$

e dunque $\tilde{\rho}$ soddisfa ancora l'equazione delle onde omogenea, con velocità c_0 , stavolta scritta per il caso tridimensionale.

Per poter ricavare l'equazione di \mathbf{v} prendiamo il gradiente della seconda equazione:

$$\frac{\partial \text{grad } \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{grad div } \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

e deriviamo rispetto al tempo la prima:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \text{grad } \tilde{\rho}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Sostituendo in quest'ultima il termine $\frac{\partial \text{grad } \tilde{\rho}}{\partial t}$ troviamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c_0^2 \text{grad div } \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

che non è esattamente l'equazione delle onde. Se però aggiungiamo l'ipotesi di irrotazionalità del moto (che d'altra parte è ovvia in un moto unidimensionale), troviamo che

$$\Delta \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v},$$

e quindi riotteniamo l'equazione delle onde anche per \mathbf{v} :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

2.8 Moto subsonico e supersonico

Ci proponiamo ora di studiare alcune peculiarità del moto di un fluido perfetto barotropico per cui la funzione $\rho = \rho(p)$ sia strettamente crescente (come già notato, il caso del fluido incomprimibile resta escluso). Possiamo quindi esprimere la pressione in funzione della densità, ovvero $p = p(\rho)$ e inoltre $\frac{dp}{d\rho} > 0$. Poniamo

$$c^2(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dp(\rho)}{d\rho}$$

che è il quadrato della velocità del suono. Derivando per composizione si ha

$$\text{grad } p(\rho) = c^2(\rho) \text{ grad } \rho,$$

dunque il sistema che descrive il moto del fluido, scritto in funzione della densità, è

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{b} - \frac{c^2(\rho)}{\rho} \text{ grad } \rho \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Introduciamo la grandezza

$$M(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|}{c(\rho(\mathbf{x}, t))}$$

che è il cosiddetto *numero di Mach*⁽¹⁸⁾. Evidentemente esso caratterizza i moti subsonici e supersonici, ovvero se $M < 1$ il moto si dirà subsonico, se $M = 1$ si dirà sonico e se $M > 1$ si dirà supersonico. La seguente proposizione mostra una interessante differenza fra i moti subsonici e supersonici.

Proposizione 2.8. *Se \mathbf{v} è una soluzione stazionaria di (2.35) con $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, si ha*

$$\frac{d}{dt}(\rho|\mathbf{v}|) = \rho(1 - M^2) \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}. \quad (2.36)$$

Dimostrazione. Poiché il moto è stazionario, dall'espressione della derivata materiale si ha

$$\frac{d}{dt}(\rho|\mathbf{v}|) = \text{grad}(\rho|\mathbf{v}|) \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}| \text{ grad } \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \text{ grad } |\mathbf{v}| \cdot \mathbf{v} \quad (2.37)$$

per il primo membro e

$$\rho(1 - M^2) \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \rho(1 - M^2) \text{ grad } |\mathbf{v}| \cdot \mathbf{v} \quad (2.38)$$

per il secondo membro. Inoltre si ha

$$\text{grad } |\mathbf{v}| = \frac{1}{2|\mathbf{v}|} \text{ grad}(v^2) = (\text{grad } \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

quindi dall'equazione di Eulero segue

$$\text{grad } |\mathbf{v}| \cdot \mathbf{v} = (\text{grad } \mathbf{v})' \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\frac{c^2}{\rho|\mathbf{v}|} \text{ grad } \rho \cdot \mathbf{v}.$$

Sostituendo $\text{grad } \rho \cdot \mathbf{v}$ nella (2.37), il primo membro diventa

$$\frac{d}{dt}(\rho|\mathbf{v}|) = \left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2} + 1 \right) \rho \text{ grad}(|\mathbf{v}|) \cdot \mathbf{v} = \rho(1 - M^2) \text{ grad } |\mathbf{v}| \cdot \mathbf{v},$$

da cui l'uguaglianza col secondo. □

⁽¹⁸⁾Ernst Waldfried Josef Wenzel MACH (Brno, 18 febbraio 1838 – Haar, 19 febbraio 1916) fisico e filosofo austriaco, a 17 anni fu ammesso all'Università di Vienna dove studiò matematica, fisica e filosofia e ricevette il titolo di dottore in fisica nel 1860. Mach fu uno dei pionieri dell'esplorazione sperimentale della percezione umana; in questo campo diede il nome alla celeberrima illusione ottica delle fasce o bande di Mach, che si può sperimentare osservando un gradiente uniforme di luminosità o di colore.

Cerchiamo di capire almeno qualitativamente cosa significa la proposizione precedente. Consideriamo la linea di corrente s che passa per un punto fissato \mathbf{x} con $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ (ricordiamo che siamo in un moto stazionario) e consideriamo la superficie S normale a s in \mathbf{x} . Poiché la normale \mathbf{n} a S in \mathbf{x} è proprio $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, si ha

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \rho(\mathbf{x})|\mathbf{v}(\mathbf{x})|$$

e quindi $\rho|\mathbf{v}|$ rappresenta il flusso di quantità di moto per unità di area attraverso la superficie normale a s . La formula (2.36) dice quindi che tale flusso cresce o decresce in funzione di $|\mathbf{v}|$ e M . In particolare, se il moto è subsonico, $M < 1$ e il flusso di quantità di moto cresce al crescere della velocità; se invece il moto è supersonico, $M > 1$ e il flusso di quantità di moto decresce al crescere della velocità.

Quello che avviene nel caso supersonico è che la densità decresce più di quanto cresca \mathbf{v} , e quindi la quantità di moto cala. Questo comportamento implica che se si vuole costruire un tunnel per portare un fluido perfetto (gas) da un moto subsonico a uno supersonico, poiché la quantità di moto si conserva, si deve creare un tunnel la cui sezione si restringe nel verso della velocità durante la fase subsonica, per poi tornare ad allargarsi durante la fase supersonica. Infatti: supponiamo per semplicità che $\mathbf{v}(x, y, z) = u(x)\mathbf{e}_x$ con $u > 0$ e chiamiamo $A(x)$ la sezione del tunnel alla coordinata x . In questo caso $\rho|\mathbf{v}| = \rho u$. L'equazione di continuità implica che $\rho u A$ resta costante, quindi nel caso subsonico per aumentare u devo aumentare ρu e quindi diminuire A , mentre nel caso supersonico per aumentare u devo diminuire ρu e quindi aumentare A .

2.8.1 Velocità critica nei gas perfetti

Supponiamo ora di trattare un gas perfetto omentropico, per cui

$$p = k\rho^\gamma.$$

Poiché $\gamma > 1$, la funzione è strettamente crescente e in questo caso il quadrato della velocità del suono diventa

$$c^2(\rho) = k\gamma\rho^{\gamma-1}$$

e la funzione di pressione, a meno di una costante,

$$\mathcal{P}(\rho) = \int \frac{dp}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} k\gamma\xi^{\gamma-2} d\xi = k \frac{\gamma\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{c^2(\rho)}{\gamma-1}.$$

Se ci poniamo nel caso stazionario con $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, dall'equazione di Bernoulli abbiamo

$$\mathcal{P} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = \text{cost.}$$

sulle linee di corrente, ovvero

$$\frac{2c^2}{\gamma-1} + |\mathbf{v}|^2 = \bar{v}^2$$

dove \bar{v}^2 è una costante relativa alla linea di corrente fissata. Osserviamo che si ha

$$|\mathbf{v}| < c \iff \frac{2|\mathbf{v}|^2}{\gamma-1} + |\mathbf{v}|^2 < \bar{v}^2 \iff \frac{\gamma+1}{\gamma-1}|\mathbf{v}|^2 < \bar{v}^2,$$

ovvero

$$|\mathbf{v}| < c \iff |\mathbf{v}| < \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\bar{v}.$$

Allo stesso modo,

$$|\mathbf{v}| > c \iff |\mathbf{v}| > \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\bar{v}.$$

La quantità

$$c_* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\bar{v}$$

è la cosiddetta *velocità critica* ed è una costante delle linee di corrente.

Per capire se un moto è subsonico, sonico o supersonico è sufficiente confrontare il modulo $|\mathbf{v}|$ della velocità con la velocità critica c_* che, a differenza della velocità del suono c , dipende solo dalla linea di corrente e non dalla posizione. In particolare, se su una certa linea di corrente la velocità del fluido eguaglia la velocità critica, allora in quel punto il moto è sonico. Si noti che, grazie al Teorema di Bernoulli, se il moto è irrotazionale allora la velocità critica è costante in ogni componente connessa del fluido, dunque anche la velocità del suono è costante.

2.9 Primo principio della termodinamica

Introduciamo ora alcune variabili termodinamiche che giocheranno un ruolo importante nel problema della chiusura delle equazioni del moto nel caso di un fluido non barotropico. Denoteremo con ε la densità di energia interna, con η la densità di entropia, con ϑ la temperatura assoluta e con τ l'inverso della densità di massa, $\tau = 1/\rho$. Nel caso di un fluido comprimibile, assumeremo che tali quantità soddisfino la relazione

$$\vartheta d\eta = d\varepsilon + p d\tau \quad (2.39)$$

dove la pressione p è intesa come una variabile termodinamica, dunque $p = p(\rho, \eta)$.

Nel caso invece di un fluido incomprimibile tale relazione si scrive più semplicemente come

$$\vartheta d\eta = d\varepsilon, \quad \rho = \rho_0. \quad (2.40)$$

Come si vede, in questo secondo caso la pressione non entra più nella relazione termodinamica ed è da considerare a tutti gli effetti una variabile dinamica. Notiamo che in un certo senso la (2.40) è un caso particolare della (2.39) con ρ costante, anche se va sottolineato il ruolo diverso della pressione nei due casi.

Comunque, se consideriamo la dipendenza dal tempo delle variabili termodinamiche possiamo scrivere

$$\vartheta \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d\tau}{dt}. \quad (2.41)$$

Se ora calcoliamo $\frac{d\tau}{dt}$, tenendo presente che $\tau = 1/\rho$ e che vale l'equazione di continuità otteniamo

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Quindi possiamo sostituire la (2.41) nella (1.16) ottenendo

$$\rho \vartheta \frac{d\eta}{dt} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + p \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Poiché $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \mathbf{D} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{D}$, otteniamo facilmente l'equazione

$$\rho \vartheta \frac{d\eta}{dt} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} + \Phi \quad (2.42)$$

dove abbiamo posto

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{T} + p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{D}. \quad (2.43)$$

La quantità Φ prende il nome di *funzione di dissipazione*, in quanto rappresenta la produzione di calore (per unità di volume e di tempo) dovuta alla deformazione, ovvero la dissipazione della deformazione.

Se, conformemente al secondo principio della termodinamica, si assume l'ipotesi che la deformazione possa assorbire calore ma non produrlo, la funzione di dissipazione dovrà soddisfare la disuguaglianza

$$\Phi \geq 0. \quad (2.44)$$

Nel caso particolare dei fluidi perfetti si ha $\Phi = 0$, e dunque l'equazione (2.42) si riduce a

$$\rho \vartheta \frac{d\eta}{dt} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (2.45)$$

equazione che lega la variazione di entropia esclusivamente a r, \mathbf{q}, ϑ . In questo caso la deformazione del fluido non produce calore.

2.10 Complementi ed esercizi

Esercizio 2.1 (Principio di Archimede⁽¹⁹⁾). Considerando un fluido in situazione statica, soggetto soltanto alla forza peso $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$, si trovi la forza risultante che l'esterno di una regione di fluido P esercita sulla regione stessa.

⁽¹⁹⁾ ARCHIMEDE dal greco Αρχιμήδης (Siracusa, circa 287 a.C. – Siracusa, 212 a.C.) è stato un matematico, astronomo, fisico e inventore. Una delle realizzazioni tecniche di Archimede più ammirata nell'antichità fu il suo planetario, formato da un apparecchio che riproduceva la volta del cielo su una sfera e un altro che prediceva il moto apparente del sole, della luna e dei pianeti. Si sa che Archimede aveva descritto la costruzione del planetario nell'opera perduta *Sulla costruzione delle sfere*.

Svolgimento. Per fare ciò, studiamo la forza \mathbf{F} che il campo di forze $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$ esercita su una regione P di un fluido in equilibrio, nel caso in cui g è costante.

La forza risultante agente su P si ottiene calcolando

$$\mathbf{F} = \int_P \rho \mathbf{b} dV = -g \left(\int_P \rho dV \right) \mathbf{e}_3 = -gM(P)\mathbf{e}_3,$$

dove $M(P)$ è la massa di P . Quindi il verso di \mathbf{F} è quello di $-\mathbf{e}_3$ e il modulo è $gM(P)$ che corrisponde al peso di P . Inoltre, poiché siamo in presenza di un sistema di forze parallele proporzionali alla densità, il punto di applicazione di \mathbf{F} è per definizione il baricentro. Quindi la forza risultante \mathbf{F} ha come punto di applicazione il baricentro di P , con verso rivolto verso il basso e modulo pari al peso del fluido contenuto in P . (Si noti che tale risultato dipende soltanto dal bilancio della quantità di moto e non è legato al tipo di materiale.)

Ora, cambiando segno a \mathbf{F} (per il terzo principio della dinamica) si trova la forza risultante che l'esterno di una regione di fluido P esercita sulla regione stessa, ricavando il *principio di Archimede*. \diamond

Esercizio 2.2. Risolvere l'equazione della fluidostatica di un gas perfetto omentropico soggetto al proprio peso trovando l'espressione del campo di pressione p in funzione della quota z , sapendo che la funzione di barotropicità è $\rho(p) = Cp^{\frac{1}{\gamma}}$, dove $\gamma > 1$ è il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante.

Svolgimento. Per prima cosa calcoliamo la funzione di pressione:

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{Cs^{\frac{1}{\gamma}}} ds = \frac{\gamma}{C(\gamma-1)} \left(p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right).$$

Dall'equazione per un fluido barotropico soggetto al proprio peso sappiamo che

$$p(z) = \mathcal{P}^{-1}(-g(z - z_0));$$

dobbiamo quindi imporre

$$\frac{\gamma}{C(\gamma-1)} \left(p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) = g(z_0 - z),$$

da cui

$$p(z) = \left(C \frac{\gamma-1}{\gamma} g(z_0 - z) + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

che è la soluzione voluta. \diamond

Esercizio 2.3 (Secchio di Newton⁽²⁰⁾). Trovare la forma della superficie libera di un fluido perfetto incompressibile di densità ρ_0 , posto in un recipiente cilindrico, che ruota uniformemente attorno al suo asse di simmetria verticale, considerando la forza di gravità con g costante.

⁽²⁰⁾ Isaac NEWTON (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 gennaio 1643 – Londra, 31 marzo 1727) grande matematico, fisico e alchimista, nel 1699 divenne anche direttore della Zecca. Questo incarico era inteso come sinecure, ma Newton lo prese seriamente, esercitando il suo potere per riformare la moneta e punire i falsari. Egli stabilì un cambio fisso fra la sterlina e l'oncia d'oro ed elaborò dei metodi per aumentare la produttività della Zecca, con misure per un maggior controllo della quantità d'oro e argento nelle monete coniate; riuscì in questo modo a chiudere le filiali provinciali della Banca d'Inghilterra e a tornare a una produzione centralizzata della moneta.

Svolgimento. Il fluido non è in quiete, ma esiste un sistema di riferimento per cui il fluido è fermo. In questo caso lo studio del moto del fluido si può condurre nel sistema di riferimento “solidale”, aggiungendo alle forze di volume le forze apparenti $-\rho\mathbf{a}$, dove \mathbf{a} è l’accelerazione di trascinamento del sistema solidale. Quindi l’equazione fondamentale della fluidostatica diventa

$$\rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \text{grad } p.$$

Naturalmente il problema è risolvibile perché in questo caso $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ è irrotazionale. Infatti, se denotiamo con $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$ la velocità angolare e ci poniamo in un sistema di riferimento solidale con il recipiente, si ha facilmente $\mathbf{a} = -\omega^2 x\mathbf{e}_1 - \omega^2 y\mathbf{e}_2$ e quindi $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ovviamente $\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{0}$ in quanto $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$. Poiché un potenziale per $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ è

$$\Psi = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz,$$

si ottiene

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz + c$$

dove c è una costante arbitraria. Imponendo che sul pelo libero la pressione sia costante ($p = p_{\text{atm}}$ pressione atmosferica), si ottiene il profilo

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) - \frac{p_{\text{atm}}}{g\rho_0} + \frac{c}{g}$$

che è l’equazione di un paraboloide di rivoluzione. \diamond

Esercizio 2.4 (Teorema di Torricelli⁽²¹⁾). Determinare la velocità del getto d’acqua che fuoriesce da un’apertura sul fondo di una cisterna immediatamente dopo la rimozione del tappo.

Svolgimento. Denotando con ρ la densità del fluido, con p_0, p la pressione rispettivamente al foro di uscita e al pelo libero del fluido, con v_0 il modulo della velocità di uscita e con z la quota del pelo libero, dal Teorema di Bernoulli abbiamo

$$gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

da cui si può ricavare v_0 una volta note p_0, p, ρ, z . Se ad esempio $p = p_0$, come può avvenire per una vasca aperta non troppo alta, si ottiene

$$v_0 = \sqrt{2gz}$$

che è il noto *Teorema di Torricelli*. \diamond

⁽²¹⁾ Evangelista TORRICELLI (Faenza, 15 ottobre 1608 – Firenze, 25 ottobre 1647) matematico e fisico, è famoso anche per la scoperta del solido di rotazione infinitamente lungo detto “tromba di Gabriele”, da lui chiamato “solido iperbolico acutissimo”, avente l’area della superficie infinita, ma il volume finito. Questo fu considerato per molto tempo un paradosso incredibile da molti, incluso lo stesso Torricelli, che cercò diverse spiegazioni alternative, anche perché l’idea di un secchio che è possibile riempire di vernice, ma impossibile da pitturare è senz’altro singolare.

Esercizio 2.5. Trovare il campo di pressione $p(x, y, t)$ ed il campo di velocità

$$\mathbf{v}(x, y, t) = u(x, y, t)\mathbf{e}_1$$

di un fluido perfetto incomprimibile che si muova in un piano tra le rette $y = 0$ e $y = h$, in assenza di forze esterne, con le condizioni al contorno per la pressione $p(0, y, t) = p_1$ e $p(L, y, t) = p_2$ con p_1, p_2 costanti.

Svolgimento. Dall'equazione di continuità si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

e dunque $u = u(y, t)$. La seconda componente dell'equazione di Eulero fornisce poi

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

e dunque $p = p(x, t)$. La prima componente dell'equazione di Eulero diventa

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.46)$$

e se deriviamo rispetto a x , considerato che u non dipende da x , otteniamo

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

da cui $p(x, t) = A(t)x + B(t)$, con A, B funzioni arbitrarie del tempo. Imponendo le condizioni al contorno sulla pressione si ottiene

$$B(t) = p_1, \quad A(t) = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

e dunque A, B non dipendono neppure dal tempo e

$$p(x) = \frac{p_2 - p_1}{L}x + p_1.$$

Se ora sostituiamo nella (2.46) abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{p_2 - p_1}{\rho_0 L},$$

da cui

$$u(y, t) = -\frac{p_2 - p_1}{\rho_0 L}t + u_0(y)$$

dove $u_0(y)$ è il dato iniziale per $u(y, t)$.

L'assenza di viscosità provoca l'aumento nel tempo della velocità, sebbene l'esperienza suggerisca che in queste condizioni venga invece raggiunto un moto stazionario. Anche la portata⁽²²⁾ del canale, che si calcola mediante

$$P = \int_0^h u(y, t)dy = h\frac{p_1 - p_2}{\rho_0 L}t + U_0(y),$$

cresce indefinitamente nel tempo. ◇

⁽²²⁾Per *portata* intendiamo il volume (o, in questo caso bidimensionale, l'area) di fluido che passa nella sezione nell'unità di tempo; per avere la massa di fluido per unità di tempo, in questo caso di densità costante, è sufficiente moltiplicare per la costante ρ_0 .

Capitolo 3

Fluidi viscosi ed equazione di Navier-Stokes

Il modello dei fluidi perfetti, che ha portato alla formulazione dell'equazione di Eulero per i fluidi, per quanto utile in molte applicazioni, è comunque un modello piuttosto limitato che non sempre risponde bene ai dati sperimentali, soprattutto nel caso dell'idrodinamica. D'altra parte, abbiamo già notato come l'ipotesi di trascurare lo sforzo tangenziale possa essere ben giustificata nel caso statico, mentre non ha evidenti risposdenze con la realtà nel caso dinamico. C'è bisogno quindi di trovare delle equazioni costitutive per il tensore degli sforzi che tengano conto del fenomeno della viscosità; queste porteranno alla scrittura dell'equazione di Navier-Stokes.⁽¹⁾

3.1 Fluidi stokesiani

Introduciamo in questa sezione il concetto di *fluido stokesiano*, che lascia più libertà, rispetto al modello di fluido perfetto, nella forma del tensore degli sforzi. George Stokes, in un articolo pubblicato all'età di 26 anni, definì le proprietà di un fluido assumendo il seguente principio:

That the difference between the pressure on a plane in a given direction passing through any point P of a fluid in motion and the pressure which would exist in all directions about P if the fluid in its neighbourhood were in a state of relative equilibrium depends only on the relative motion of the fluid immediately about P ; and that the relative motion due to any motion of rotation may be eliminated without affecting the differences of the pressures above mentioned.⁽²⁾

⁽¹⁾Claude-Louis NAVIER (Digione, 10 febbraio 1785 – Parigi, 21 agosto 1836) ingegnere e matematico, in vita fu famoso specialista nella costruzione di strade e ponti, e fu il primo a sviluppare su basi scientifiche una teoria dei ponti sospesi.

⁽²⁾George G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII p. 287 (1845).

Una possibile traduzione è: “che la differenza tra la pressione che si ha su un piano fissato passante per un punto P di un fluido in moto e la pressione che si avrebbe in ogni direzione se il fluido fosse in equilibrio relativo in un intorno di P dipenda solo dal moto relativo del fluido immediatamente intorno a P ; e che il moto relativo dovuto ad una generica rotazione possa essere eliminato senza modificare le differenze delle pressioni sopra citate.”

Volendo anche noi adeguarci all'idea di Stokes, alla luce di questo principio introduciamo il *tensore di viscosità*

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T} + p\mathbf{l},$$

e diciamo che un fluido è *stokesiano* se il tensore simmetrico \mathbf{V} è tale che:

- (1) \mathbf{V} dipende solo dal tensore velocità di deformazione \mathbf{D} e non da altre variabili cinematiche;
- (2) \mathbf{V} non dipende esplicitamente dalla posizione;
- (3) \mathbf{V} è *isotropo*, ovvero non ha direzioni spaziali privilegiate;
- (4) $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ se $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Naturalmente \mathbf{V} dipende in generale anche da variabili termodinamiche, su cui per ora non facciamo ipotesi.

La dipendenza del tensore \mathbf{V} da \mathbf{D} deve essere in realtà di una forma piuttosto particolare, come vediamo nel prossimo teorema. Ricordiamo che gli invarianti principali di una matrice \mathbf{A} sono i coefficienti i_1, i_2, i_3 tali che

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^3 - i_1\lambda^2 + i_2\lambda - i_3.$$

Tali coefficienti sono invarianti per coniugio e in particolare si ha che $i_1 = \text{tr } \mathbf{A}$ e $i_3 = \det \mathbf{A}$.

Teorema 3.1. *Per un fluido stokesiano si ha*

$$\mathbf{V} = \alpha\mathbf{l} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2$$

dove α, β, γ sono funzioni solo degli invarianti principali di \mathbf{D} .

Dimostrazione. Tenendo fisse le eventuali variabili termodinamiche, dai primi due postulati si ha subito che esiste $f : \text{Sym}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^3)$ tale che $\mathbf{V} = f(\mathbf{D})$ e dal terzo segue che

$$f(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{-1}f(\mathbf{D})\mathbf{R}$$

per ogni matrice ortogonale \mathbf{R} . Inoltre, dall'ultimo postulato si ha $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Siano $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ due matrici simmetriche coniugate; allora anche $f(\mathbf{D}_1), f(\mathbf{D}_2)$ saranno coniugate, infatti: \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 sono coniugate e dunque esiste una matrice ortogonale \mathbf{R} tale che $\mathbf{D}_1 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}_2\mathbf{R}$. Quindi

$$f(\mathbf{D}_1) = f(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}_2\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{-1}f(\mathbf{D}_2)\mathbf{R}$$

ovvero anche $f(\mathbf{D}_1), f(\mathbf{D}_2)$ sono coniugate. In particolare, $f(\mathbf{D}_1)$ e $f(\mathbf{D}_2)$ hanno gli stessi autovalori. Denotando con d_1, d_2, d_3 gli autovalori di \mathbf{D} e con v_1, v_2, v_3 gli autovalori di $f(\mathbf{D})$, si ha allora che

$$v_i = f_i(d_1, d_2, d_3) \quad i = 1, 2, 3.$$

Supponiamo ora che i d_i siano tutti distinti; ponendo

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & d_1 & d_1^2 \\ 1 & d_2 & d_2^2 \\ 1 & d_3 & d_3^2 \end{bmatrix}$$

si ha $\det \mathbf{A} = (d_1 - d_2)(d_2 - d_3)(d_3 - d_1) \neq 0$ e dunque il sistema lineare

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

ha soluzione, ovvero

$$v_i = \alpha + \beta d_i + \gamma d_i^2 \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

dove i coefficienti α, β, γ sono funzioni di (d_1, d_2, d_3) . Poiché una permutazione nei d_i produce una analoga permutazione nei v_i (infatti tale permutazione degli autovalori può essere ottenuta mediante una trasformazione ortogonale), si ha che α, β, γ sono funzioni simmetriche dei d_i , quindi possono dipendere solamente dagli invarianti principali di \mathbf{D} .

Se gli autovalori di \mathbf{D} non sono tutti distinti, si può dimostrare che anche i v_i non sono tutti distinti e si giunge comunque alla (3.1), eventualmente con $\gamma = 0$ o $\beta = 0$. In ogni caso, la (3.1) implica che

$$\mathbf{V} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2,$$

quindi la dimostrazione è completa. \square

In particolare segue che

$$\mathbf{T} = \tilde{\alpha} \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2$$

dove $\tilde{\alpha} = \alpha - p$. È interessante notare che la forma del tensore degli sforzi di un fluido stokesiano, per quanto le ipotesi siano piuttosto generali, in realtà è un polinomio di grado due in \mathbf{D} .

3.2 Fluidi newtoniani e legge di Cauchy-Poisson

Introduciamo ora i cosiddetti *fluidi newtoniani*. Essi sono particolari fluidi stokesiani in cui si suppone che \mathbf{V} sia *lineare* rispetto a \mathbf{D} : in questo caso si ha $\gamma = 0$, β costante e α lineare in \mathbf{D} , ovvero α è un multiplo del primo invariante principale, la traccia di \mathbf{D} . Poiché $\text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{v}$, si ottiene

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda \text{div } \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (3.2)$$

che è la nota *legge costitutiva di Cauchy-Poisson*⁽³⁾. I coefficienti p, λ, μ sono costanti rispetto alle variabili cinematiche, ma possono dipendere in generale dalle variabili termodinamiche. In particolare, λ e μ si dicono *coefficienti di viscosità*.

Per un fluido newtoniano incomprimibile, poiché $\text{div } \mathbf{v} = 0$, l'equazione costitutiva di \mathbf{T} si scrive

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}; \quad (3.3)$$

⁽³⁾Siméon-Denis POISSON (Pithiviers, 21 giugno 1781 – Parigi, 25 aprile 1840) fu un grande matematico francese, affiancò sempre all'insegnamento una produttivissima attività di ricerca su svariati argomenti che affrontava però sempre uno alla volta, senza lasciarsi distrarre, durante una ricerca, da idee ad essa non correlate, che annotava semplicemente nel suo taccuino in attesa di poterle sviluppare. In *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile* apparve per la prima volta la distribuzione di Poisson, che descrive la probabilità del verificarsi di un evento casuale in un intervallo di tempo sotto l'ipotesi che la probabilità del verificarsi sia molto piccola, ma il numero di prove molto alto; fu lui ad introdurre l'espressione "legge dei grandi numeri".

in questo caso, come d'altronde avviene già nei fluidi perfetti, la pressione p non è più una variabile termodinamica, in quanto la densità è costante.

Il secondo principio della termodinamica porta una restrizione sul segno dei coefficienti di viscosità. Infatti, ricordando il concetto di funzione di dissipazione introdotto nella (2.43), per un tensore che soddisfa la legge di Cauchy-Poisson si ha

$$\Phi = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}.$$

Poiché si ha $\operatorname{div} \mathbf{v} = d_1 + d_2 + d_3$ e $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$, dove i d_i sono gli autovalori di \mathbf{D} , è facile verificare che⁽⁴⁾

$$3\Phi = (3\lambda + 2\mu)(d_1 + d_2 + d_3)^2 + 2\mu [(d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + (d_3 - d_1)^2]$$

e dunque dall'arbitrarietà di \mathbf{D} , ricordando la disuguaglianza (2.44), scegliendo ad esempio $d_1 = d_2 = d_3$ si ottiene $3\lambda + 2\mu \geq 0$, e scegliendo $d_1 + d_2 = d_3 = 0$ si ottiene $\mu \geq 0$. Dunque si hanno le relazioni

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0; \quad (3.4)$$

in particolare, nel caso incomprimibile l'unico coefficiente di viscosità μ deve essere positivo.

3.2.1 Equazioni di Navier-Stokes

È giunto finalmente il momento di ricavare il sistema di equazioni che governa il moto di un fluido newtoniano. Per fare questo è sufficiente sostituire la (3.2) nell'equazione del moto (1.12) e considerare anche l'equazione di continuità, ottenendo

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

a cui andranno eventualmente aggiunte le equazioni della termodinamica o l'equazione di barotropicità. Nel caso incomprimibile tale sistema diventa

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_0 \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Supponiamo ora che i coefficienti di viscosità siano costanti; allora λ e μ si possono portare fuori dagli operatori di derivazione. Per calcolare $\operatorname{div} \mathbf{D}$ basta ricordare la definizione di laplaciano e la (A.18), da cui

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v})') = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (3.5) abbiamo dunque il nuovo sistema

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

⁽⁴⁾Segue dall'identità $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$.

che è il celeberrimo *sistema di equazioni di Navier-Stokes* per un fluido newtoniano comprimibile. Nel caso incomprimibile tale sistema diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

dove $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu/\rho_0$ è la cosiddetta *viscosità cinematica*.

3.2.2 Condizioni al contorno

Se nel caso dei fluidi perfetti le condizioni al contorno usuali assegnate per un dominio sono le condizioni di impenetrabilità, ovvero $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sul bordo del dominio (se la parete è ferma), tali condizioni non sono più sufficienti per l'equazione di Navier-Stokes. In quest'ultimo caso siamo infatti in presenza di un'equazione del secondo ordine (per i termini $\text{grad div } \mathbf{v}$ e $\Delta \mathbf{v}$) e quindi le condizioni al contorno devono essere aumentate. La presenza della viscosità, e dunque degli sforzi di taglio, suggerisce di imporre come condizione al contorno che il fluido sia solidale con le pareti che lo contengono, ovvero la *condizione di aderenza*

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \quad (3.9)$$

dove \mathbf{V} indica la velocità della parete. Questa condizione, detta anche *no-slip condition*, è chiaramente più forte della precedente, perché vincola tutte le componenti della velocità, e non solo quella normale al bordo. In particolare si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sui bordi fissi.}$$

A tale proposito, osserviamo una cosa interessante: poiché dalla (A.25) si ha

$$\Delta \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v},$$

se ci mettiamo nel caso incomprimibile $\text{div } \mathbf{v} = 0$ la (3.8) diventa

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_0 \mathbf{b} - \text{grad } p - \mu \text{rot } \boldsymbol{\omega};$$

se il moto è irrotazionale, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e l'equazione di Navier-Stokes coincide con quella dei fluidi perfetti. Questo però non vuol dire che i moti viscosi irrotazionali si riducono a moti perfetti, perché le condizioni al contorno nelle due situazioni sono alquanto diverse. Inoltre, come vedremo tra poco, nel caso viscoso non è più vero che un moto irrotazionale resta tale in tutti gli istanti.

3.2.3 Vorticità e circolazione nei fluidi newtoniani incomprimibili

Consideriamo ora un fluido newtoniano incomprimibile, il cui moto è retto dalle equazioni (3.8). Calcoliamo il rotore dell'accelerazione:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{b} + \nu \text{rot } \Delta \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{b} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega},$$

dove abbiamo usato il fatto che $\text{rot } \Delta \mathbf{u} = \Delta \text{rot } \mathbf{u}$. Se le forze esterne sono conservative si ha dunque

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (3.10)$$

e dunque l'accelerazione non è più irrotazionale. In particolare l'equazione di diffusione di Beltrami (2.14), considerato che ρ è costante, diventa

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = D\boldsymbol{\omega} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}. \quad (3.11)$$

Confrontando questa equazione con l'equazione di Helmholtz nel caso incomprimibile, si vede come nel caso viscoso ci sia un termine in più che può modificare la vorticità. In particolare, nel caso piano, visto che $D\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, si ha

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}$$

e dunque non è detto che la vorticità sia trasportata come uno scalare passivo.

Anche per la circolazione le cose vanno in modo alquanto diverso da quello dei fluidi perfetti. Il problema è che per i fluidi newtoniani l'accelerazione non è più irrotazionale a causa della presenza del termine $\Delta\mathbf{v}$ e dunque non si può dimostrare un analogo del Teorema di Kelvin. Se supponiamo che il fluido newtoniano sia incomprimibile e le forze esterne siano conservative, dalla (2.13) si ha

$$\frac{d}{dt} \oint_{\ell(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\ell(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{x} = \nu \oint_{\ell(t)} \Delta\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

e dunque in generale la circolazione nei fluidi newtoniani non si conserva.

3.3 Numero di Reynolds

Consideriamo il sistema di Navier-Stokes nel caso incomprimibile e con $\mathbf{b} = 0$ su un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} = -\text{grad } \frac{p}{\rho_0} + \nu\Delta\mathbf{v}, & \text{div } \mathbf{v} = 0 & \text{su } [0, T] \times \Omega \\ \mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{v}_0 & & \text{su } \Omega \\ \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_1(t, x) & & \text{su } [0, T] \times \partial\Omega. \end{cases}$$

L'obiettivo di questa sezione è introdurre un parametro adimensionale che in qualche modo quantifichi l'azione della viscosità su un moto. A parte le condizioni al contorno, è infatti vero che l'equazione dei fluidi perfetti si ottiene annullando il parametro di viscosità ν (o μ), quindi ci si chiede se è vero che i fluidi con "bassa viscosità" possano essere considerati fluidi "quasi" perfetti. La questione, così enunciata, è mal posta, perché la viscosità non è un parametro adimensionale e quindi va specificato rispetto a cosa deve essere piccola. In realtà vediamo che l'effetto della viscosità su un moto dipende sia da ν che dalle condizioni al contorno e dalla geometria del moto stesso; tale effetto è quindi una caratteristica del moto, e non del fluido.

Denotiamo con L la lunghezza caratteristica della geometria del moto e con U la velocità (in modulo) caratteristica del moto. La scelta di U e L è chiaramente alquanto arbitraria ma dal punto di vista fisico conta come ordine di grandezza. Ad esempio, se si vuole descrivere il flusso di un fluido in un tubo, L potrebbe essere il diametro del tubo e U la velocità media; oppure, nel caso di un flusso che investe un ostacolo, L potrebbe essere la sezione dell'ostacolo e U il modulo della velocità lontano dall'ostacolo.

Poniamo poi $T \stackrel{\text{def}}{=} L/U$; questo numero indicherà la scala caratteristica dei tempi in cui avviene il moto. Riscaldiamo poi le variabili, in modo da renderle adimensionali: poniamo

$$\mathbf{v}' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad \mathbf{x}' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad p' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{\rho_0 U^2}, \quad t' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t}{T}.$$

Vogliamo scrivere l'equazione di Navier-Stokes nelle variabili $\mathbf{v}', p', \mathbf{x}', t'$: osservando che

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{T},$$

e denotando con grad' e Δ' i rispettivi operatori di derivazione rispetto alle nuove variabili, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\partial(\mathbf{v}'U)}{\partial t} = \frac{U}{T} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'}, \\ (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} &= U^2(\text{grad } \mathbf{v}')\mathbf{v}' = \frac{U^2}{L}(\text{grad}' \mathbf{v}')\mathbf{v}', \\ \text{grad } \frac{p}{\rho_0} &= \frac{U^2}{L} \text{grad}' p', \\ \Delta \mathbf{v} &= U \Delta \mathbf{v}' = \frac{U}{L^2} \Delta' \mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di Navier-Stokes si ottiene

$$\frac{U}{T} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} (\text{grad}' \mathbf{v}')\mathbf{v}' = -\frac{U^2}{L} \text{grad}' p' + \nu \frac{U}{L^2} \Delta' \mathbf{v}'.$$

Ricordando poi la definizione di T e moltiplicando tutto per L/U^2 risulta

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\text{grad}' \mathbf{v}')\mathbf{v}' = -\text{grad}' p' + \frac{\nu}{UL} \Delta' \mathbf{v}'.$$

Se ora poniamo

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{LU}{\nu}$$

otteniamo la *forma adimensionale dell'equazione di Navier-Stokes*

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\text{grad}' \mathbf{v}')\mathbf{v}' = -\text{grad}' p' + \frac{1}{R} \Delta' \mathbf{v}', \quad \text{div}' \mathbf{v}' = 0. \quad (3.12)$$

Naturalmente, eventuali condizioni al contorno andranno riscalate in modo simile.

Il parametro adimensionale positivo R è detto *numero di Reynolds*⁽⁵⁾ e caratterizza l'influenza del termine di viscosità $\Delta' \mathbf{v}'$ sul moto. I moti che presentano un forte effetto viscoso saranno caratterizzati da un numero di Reynolds *piccolo*, mentre quelli per cui l'effetto viscoso è trascurabile avranno un numero di Reynolds *grande*. Se due moti diversi hanno lo stesso numero di Reynolds e una geometria simile, essi avranno le stesse caratteristiche, in quanto entrambi risolvono la stessa equazione adimensionale. Saranno un semplice riscaldamento l'uno dell'altro. Questo fatto può interessare se si vogliono creare degli esperimenti che simulino in piccolo dei fenomeni su grande scala: è sufficiente fare in modo che il numero di Reynolds non cambi.

⁽⁵⁾Osborne REYNOLDS (Belfast, 23 agosto 1842 – Watchet, 21 febbraio 1912) dopo aver lavorato come apprendista in un cantiere navale, studiò matematica a Cambridge. Sulla motivazione di tale scelta scrisse: “*Fin dai miei più remoti ricordi ho provato un interesse irrefrenabile per la meccanica e per le leggi fisiche su cui essa si basa come scienza [...] la mia attenzione fu rivolta a vari fenomeni meccanici, per la cui spiegazione scoprii essere essenziale la conoscenza della matematica.*”

3.3.1 Altri parametri adimensionali

Se nelle equazioni di Navier-Stokes è presente anche una forza esterna con densità di massa \mathbf{b} , e tale termine ha una scala tipica b (che avrà l'unità di misura di un'accelerazione), allora avremo un parametro dimensionale in più. In questo caso, oltre al numero di Reynolds, conviene introdurre un altro numero adimensionale, detto *numero di Froude*,⁽⁶⁾ dato da

$$F = \frac{U}{\sqrt{Lb}}.$$

Tale numero misura l'importanza della forza in relazione alla velocità e alla lunghezza caratteristiche del moto.

Se invece nell'equazione è presente un tempo caratteristico \hat{T} diverso da L/U , ad esempio per la presenza di forze o di condizioni al contorno periodiche nel tempo, oppure più comunemente per le oscillazioni tipiche prodotte da fenomeni di turbolenza, oltre al numero di Reynolds si può introdurre il *numero di Strouhal*⁽⁷⁾

$$S = \frac{L}{U\hat{T}}.$$

3.4 Soluzioni particolari delle equazioni di Navier-Stokes

Studiamo ora alcuni casi (piuttosto semplici) in cui le equazioni di Navier-Stokes possono essere risolte esplicitamente. Prima descriveremo i cosiddetti *flussi viscometrici*: moti stazionari mediante i quali è possibile caratterizzare sperimentalmente la viscosità di un fluido newtoniano; poi vedremo un esempio di soluzione non stazionaria dell'equazione.

3.4.1 Flussi viscometrici a simmetria cilindrica

Consideriamo il caso di un tubo cilindrico fisso a sezione circolare di raggio R_2 . Supponiamo che un fluido newtoniano incomprimibile scorra in questo tubo in assenza di forze esterne e in moto stazionario. Cerchiamo una soluzione con campo di velocità a simmetria cilindrica ossia, ponendoci in coordinate cilindriche r, ϑ, z con l'asse z lungo l'asse del cilindro, $\mathbf{v} = v_r(r)\mathbf{e}_r + v_\vartheta(r)\mathbf{e}_\vartheta + v_z(r)\mathbf{e}_z$. Il campo di pressione $p = p(r, z)$ potrà in generale dipendere anche da z (ma dimostreremo poi che la dipendenza da z dovrà essere lineare).

Ricordiamo, dai conti fatti nella sezione A.3, che in coordinate cilindriche si ha

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z, \\ \text{div } \mathbf{u} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \text{grad } \mathbf{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r}\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - u_\vartheta\right)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r\right)\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{\partial u_r}{\partial z}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z}\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial z}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial r}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

⁽⁶⁾William FROUDE (Dartington, UK, 28 novembre 1810 – Simonstown, Sudafrica, 4 maggio 1879) ingegnere e architetto navale britannico. Studiò a fondo la resistenza dell'acqua contro le carene delle navi e la stabilità dei profili navali.

⁽⁷⁾Vincent STROUHAL (Seč, 10 aprile 1850 – Praga, 23 gennaio 1922), fisico cecoslovacco.

In particolare, nel caso radiale con le dipendenze sopra fissate, si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r}, \\ (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} &= \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\vartheta^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left(v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_r v_\vartheta}{r} \right) \mathbf{e}_\vartheta + \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_z, \\ \operatorname{grad} p &= \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

e ricordando inoltre le (A.31), (A.20),

$$\Delta \mathbf{v} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) - \frac{v_\vartheta}{r^2} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_z.$$

Proiettando le equazioni di Navier-Stokes sugli assi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0 \\ \rho_0 \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\vartheta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ \rho_0 \left(v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_r v_\vartheta}{r} \right) = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) - \frac{v_\vartheta}{r^2} \right) \\ \rho_0 v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

cui assoceremo la condizione di aderenza sul cilindro fisso di raggio R_2 , ossia $\mathbf{v}(R_2) = \mathbf{0}$.

Dalla prima equazione si ha $rv_r = c_1$ e dunque $v_r = 0$ poiché $v_r(R_2) = 0$.⁽⁸⁾ In tal modo la seconda equazione diventa

$$\rho_0 \frac{v_\vartheta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r};$$

derivando entrambi i membri rispetto a z si ottiene che $\frac{\partial p}{\partial r}$ non dipende da z e quindi $\frac{\partial p}{\partial z}$ non dipende da r . Da questa equazione sarà facile ricostruire il campo di pressione una volta determinata v_ϑ dalla terza equazione.

L'ultima equazione diventa

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right);$$

derivando entrambi i membri rispetto a z scopriamo che $\frac{\partial p}{\partial z} = C$, ossia il gradiente di pressione lungo z è una costante, eventualmente nulla, che può essere fissata ad esempio assegnando la pressione sul bordo a due quote diverse. Con questa osservazione diventa facile ottenere la velocità in direzione assiale e si ha

$$v_z(r) = \frac{C}{4\mu} r^2 + c_2 \log r + c_3.$$

Ora dalla terza equazione si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) = \frac{v_\vartheta}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r^2} = \frac{v_\vartheta}{r}$$

⁽⁸⁾Per ottenere $v_r = 0$ in realtà è sufficiente imporre l'impenetrabilità sulla parete del cilindro, quindi è vera anche nei casi in cui il cilindro ruota su se stesso o si muove con velocità parallela al suo asse.

e facendo la sostituzione $v_\vartheta = r\xi(r)$ si ottiene l'equazione differenziale

$$r\xi'' + 3\xi' = 0, \quad \text{da cui} \quad \xi = \frac{c_4}{r^2} + c_5,$$

ovvero

$$v_\vartheta(r) = \frac{c_4}{r} + c_5 r.$$

A questo punto possiamo anche calcolare il campo di pressione:

$$\frac{1}{\rho_0} p(r, z) = \frac{C}{\rho_0} z - \frac{c_4^2}{2r^2} + 2c_4 c_5 \log r + \frac{c_5^2}{2} r^2 + c_6.$$

Distinguiamo ora tre casi mediante un'opportuna scelta delle condizioni al contorno.

- (1) Imponiamo l'aderenza alla parete del cilindro $v_\vartheta(R_2) = v_z(R_2) = 0$ ed un gradiente di pressione non nullo lungo z ($C \neq 0$). Vogliamo inoltre che la soluzione sia definita all'interno di tutto il cilindro, cioè essa non deve divergere in alcun punto, e quindi otteniamo subito $c_2 = c_4 = 0$. L'aderenza per v_ϑ implica allora $c_5 = 0$ mentre $v_z(R_2) = 0$ diventa

$$c_3 = -\frac{C}{4\mu} R_2^2.$$

La soluzione complessiva risulta quindi

$$v_r(r) = 0, \quad v_\vartheta(r) = 0, \quad v_z(r) = -\frac{C}{4\mu} (R_2^2 - r^2), \quad p(z) = Cz + \rho_0 c_6, \quad (3.14)$$

che rappresenta il cosiddetto *moto di Poiseuille*⁽⁹⁾.

In questo caso poi è facile calcolare la portata su una sezione circolare C :

$$P = \int_C v_z(r) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} r v_z(r) dr d\vartheta = -\frac{\pi C}{8\mu} R_2^4.$$

Questa formula può essere usata per calcolare il coefficiente di viscosità μ di un fluido newtoniano incomprimibile, visto che le grandezze C (gradiente di pressione) e P (portata) sono facilmente misurabili in condizioni stazionarie.

- (2) Introduciamo ora un secondo cilindro di raggio $R_1 < R_2$ che abbia ancora l'asse in corrispondenza dell'asse z e supponiamo che, mentre il cilindro esterno sta fermo, quello interno ruoti con velocità angolare ω_1 . Poniamo poi il gradiente di pressione $C = 0$ e osserviamo che, avendo escluso l'asse $r = 0$ dal dominio in cui si muove il fluido, le soluzioni generali sopra ottenute non contengono termini divergenti.

La condizione di aderenza al bordo per v_z diventa ora $v_z(R_1) = v_z(R_2) = 0$ che implica $c_2 = c_3 = 0$. L'aderenza per v_ϑ invece dà

$$\begin{cases} v_\vartheta(R_1) = \frac{c_4}{R_1} + c_5 R_1 = \omega_1 R_1 \\ v_\vartheta(R_2) = \frac{c_4}{R_2} + c_5 R_2 = 0 \end{cases}$$

⁽⁹⁾Jean Louis Marie POISEUILLE (Parigi, 22 aprile 1799 – Parigi, 26 dicembre 1869) medico, fisiologo e fisico, il suo contributo allo studio della fluidodinamica derivò da interessi medici. Infatti è nella dissertazione *Recherches sur la force du coeur aortique* che presentò i suoi risultati. Il *Poise*, unità di misura della viscosità nel sistema CGS, prende il nome da lui.

da cui

$$\begin{cases} c_4 = \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ c_5 = -\frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{cases}$$

che fornisce la soluzione per il cosiddetto *moto di Couette*⁽¹⁰⁾:

$$\begin{aligned} v_r(r) = 0, \quad v_z(r) = 0, \quad v_\vartheta(r) = \frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right), \\ p(r) = \rho_0 \omega_1^2 \left(-\frac{R_2^4}{2r^2} - 2R_2^2 \log r + \frac{r^2}{2} \right) \frac{R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} + \rho_0 c_6. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Per poter utilizzare questo tipo di moto rotatorio al fine di misurare la viscosità di un fluido bisogna mettere in relazione lo sforzo tangenziale f applicato sul cilindro interno per mantenerlo in rotazione con la velocità angolare ω_1 . Osserviamo che i punti materiali sul cilindro di raggio R_1 si muovono di moto circolare uniforme, quindi la risultante delle forze tangenziali deve essere nulla; allora f avrà uguale modulo e segno opposto allo sforzo esercitato dal fluido sulla parete a causa della condizione di aderenza. Possiamo quindi calcolare per $r = R_1$

$$|f| = |(\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{e}_\vartheta| = (2\mu \mathbf{D}\mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \mu \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = \frac{2\mu R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \omega_1.$$

Abbiamo quindi una relazione lineare tra $|f|$ e ω_1 , possiamo misurare le velocità angolari corrispondenti a diverse intensità dello sforzo tangenziale imposto, interpolare linearmente i dati ottenuti e trovare il coefficiente angolare della retta interpolatrice, da cui si ricava facilmente una misura per la viscosità μ .

- (3) Da ultimo possiamo considerare il caso in cui il cilindro interno, oltre a ruotare, si muova con velocità costante W in direzione \mathbf{e}_z ; manteniamo inoltre il gradiente di pressione $C \neq 0$ lungo z . Per la componente v_ϑ del campo di velocità la soluzione è identica a quella del caso precedente, ma ad essa si sovrappone un moto lungo \mathbf{e}_z . La possibilità di sovrapporre tali moti ottenuti in maniera indipendente è chiaramente dovuta al fatto che le equazioni per v_ϑ e v_z risultano disaccoppiate, visto che il termine non lineare risulta in esse assente sotto le nostre ipotesi.

Imponendo allora le nuove condizioni di aderenza per v_z si ha

$$\begin{cases} v_z(R_1) = \frac{C}{4\mu} R_1^2 + c_2 \log R_1 + c_3 = W \\ v_z(R_2) = \frac{C}{4\mu} R_2^2 + c_2 \log R_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

⁽¹⁰⁾Maurice Marie Alfred COUETTE (Tours, 9 gennaio 1858 – Angers, 18 agosto 1943) fu il primo ad effettuare misure accurate di viscosità sui fluidi, utilizzando un viscosimetro cilindrico di sua invenzione. Mostrò anche sperimentalmente la validità in molti casi applicativi della condizione di aderenza di un fluido viscoso alle pareti del contenitore.

da cui

$$\begin{cases} c_2 = -\frac{4\mu W + C(R_2^2 - R_1^2)}{4\mu \log \frac{R_2}{R_1}} \\ c_3 = -\frac{C}{4\mu} R_2^2 - c_2 \log R_2 \end{cases}$$

che fornisce la soluzione per la componente assiale della velocità:

$$v_z(r) = -\frac{C}{4\mu}(R_2^2 - r^2) - c_2 \log \frac{R_2}{r} = -\frac{C}{4\mu}(R_2^2 - r^2) + \frac{4\mu W + C(R_2^2 - R_1^2)}{4\mu \log \frac{R_2}{R_1}} \log \frac{R_2}{r}.$$

Il campo di pressione è invece:

$$p(r, z) = Cz + \rho_0 \omega_1^2 \left(-\frac{R_2^4}{2r^2} - 2R_2^2 \log r + \frac{r^2}{2} \right) \frac{R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} + \rho_0 c_6.$$

3.4.2 Moto generato da un piano oscillante

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile che riempia il semispazio $x \geq 0$ e che aderisca al piano yz . Supponiamo che tale piano oscilli armonicamente lungo la direzione \mathbf{e}_y con frequenza ω . In tal modo si ha la condizione al bordo

$$\mathbf{v}(0, y, z, t) = v_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_y$$

ed imponiamo la condizione all'infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{0}.$$

Cerchiamo una soluzione delle equazioni di Navier-Stokes che dipenda solo da x e dal tempo, ossia

$$\mathbf{v}(x, t) = u(x, t) \mathbf{e}_x + v(x, t) \mathbf{e}_y + w(x, t) \mathbf{e}_z, \quad p(x, t).$$

Dall'equazione di continuità si ha immediatamente $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, cioè $u(x, t) = c(t)$; ma per ogni t $u(0, t) = 0$ e quindi $u(x, t) = 0$. Il termine non lineare risulta:

$$(\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni del moto diventano allora

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

con $v(0, t) = v_0 \cos(\omega t)$ e $w(0, t) = 0$.

Dalla prima equazione si ha che il campo di pressione è uniforme e dipende solo dal tempo, ma se fissiamo un valore costante di p , ad esempio all'infinito, sarà anch'essa costante.

Cerchiamo per il campo di velocità soluzioni di tipo oscillante:

$$v(x, t) = \text{Re}(Ae^{i(kx - \omega t)}), \quad w(x, t) = \text{Re}(Be^{i(kx - \omega t)}).$$

Dalle condizioni al bordo per w si ha, per ogni t , $w(0, t) = \operatorname{Re}(Be^{-i\omega t}) = 0$, da cui $B = 0$. Poiché $w(x, t) = 0$ identicamente risolve la terza equazione del moto, è proprio l'unica soluzione di tipo oscillante.

La condizione al bordo per v diventa $v(0, t) = \operatorname{Re}(Ae^{-i\omega t}) = \operatorname{Re}(v_0e^{-i\omega t})$, da cui $A = v_0$ e $\omega_v = \omega$. Resta soltanto da determinare il numero d'onda k mediante la seconda equazione del moto. Sostituendo in essa, pensata ora in campo complesso, l'espressione di v si ottiene

$$-i\omega v(x, t) = -k^2 \frac{\mu}{\rho_0} v(x, t),$$

da cui

$$k = \pm \sqrt{i \frac{\omega \rho_0}{\mu}} = \pm \sqrt{\frac{\omega \rho_0}{\mu}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right).$$

Se ora poniamo $m = \sqrt{\omega \rho_0 / 2\mu}$, abbiamo le due soluzioni

$$v(x, t) = \operatorname{Re}(v_0 e^{i[\pm m(1+i)x - \omega t]}) = v_0 e^{\mp mx} \cos(\pm mx - \omega t),$$

di cui soltanto quella che si annulla nel limite $x \rightarrow \infty$ è fisicamente accettabile.

3.5 Decomposizione di Helmholtz-Hodge e ruolo della pressione

Mostriamo in questa sezione una via per scrivere l'equazione di Navier-Stokes incomprimibile in modo che l'unica incognita sia il campo di velocità. Tale risultato, applicabile in realtà anche al caso dei fluidi perfetti incomprimibili, si basa sul seguente risultato.

Teorema 3.2. (Decomposizione di Helmholtz-Hodge⁽¹¹⁾) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio regolare e sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 su Ω . Allora si ha in modo unico

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \operatorname{grad} p$$

dove $p \in C^2(\Omega)$, $\mathbf{w} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ in Ω e $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} = 0$ su $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Esistenza: dato \mathbf{u} , consideriamo il problema di Neumann⁽¹²⁾

$$\begin{cases} \Delta p = \operatorname{div} \mathbf{u} & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

È noto che, nelle nostre condizioni di regolarità e grazie al teorema della divergenza,⁽¹³⁾ tale problema ammette soluzione di classe C^2 unica a meno di una costante. Poniamo poi $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - \operatorname{grad} p$. Si ha facilmente

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta p = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \operatorname{grad} p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

⁽¹¹⁾William Vallance Douglas HODGE (Edimburgo, 17 giugno 1903 – Cambridge, 7 luglio 1975) sviluppò un'importante teoria che collega la geometria algebrica con la geometria differenziale.

⁽¹²⁾Carl Gottfried NEUMANN (Königsberg, 7 maggio 1832 – Leipzig, 27 marzo 1925) fu attivo in molti campi della matematica applicata come la fisica matematica, la teoria dei potenziali e l'elettrodinamica. Fu uno dei fondatori della rivista *Mathematische Annalen*.

⁽¹³⁾Ovviamente il problema di Neumann $\Delta p = f$, $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = g$ ha senso se vale $\int_{\Omega} f \, dV = \int_{\partial\Omega} g \, dS$.

e dunque p e \mathbf{w} soddisfano i requisiti.

Unicità: sia $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \text{grad } p_1 = \mathbf{w}_2 + \text{grad } p_2$ con $\text{div } \mathbf{w}_1 = \text{div } \mathbf{w}_2 = 0$ e $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$ su $\partial\Omega$. Allora deve essere $\Delta(p_1 - p_2) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial n}(p_1 - p_2) = 0$, ovvero $p_1 - p_2 = \text{cost.}$ (per l'unicità della soluzione nel problema di Neumann) e dunque anche $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$. \square

Denotiamo con \mathcal{V} lo spazio vettoriale dei campi vettoriali \mathbf{w} su Ω tali che $\text{div } \mathbf{w} = 0$ in Ω e $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ su $\partial\Omega$. Il teorema precedente permette di introdurre l'operatore di proiezione $\mathbb{P} : C^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{V}$ definito da $\mathbb{P}\mathbf{u} = \mathbf{w}$. È chiaro che \mathbb{P} è lineare e si ha $\mathbb{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ se e solo se $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ e $\mathbb{P}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$.

Se ora consideriamo l'equazione di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili sottoposti a forze conservative su un dominio fisso Ω (ma il discorso è analogo per i fluidi perfetti barotropici), si ha che la soluzione \mathbf{v} appartiene a \mathcal{V} per ogni t . Applichiamo l'operatore \mathbb{P} ai due membri dell'equazione:

$$\mathbb{P} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbb{P}[(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}] = \mathbb{P}\mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \mathbb{P} \text{grad } p + \nu \mathbb{P} \Delta \mathbf{v};$$

tenendo conto che la derivata temporale commuta con \mathbb{P} e che \mathbf{b} è un gradiente, si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbb{P}[(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}] = \nu \mathbb{P} \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

che è una riscrittura dell'equazione di Navier-Stokes in cui non compare la pressione. In particolare, se usiamo la forma adimensionale (3.12) otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbb{P}[-(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{v}].$$

Per numeri di Reynolds piccoli ha senso dunque supporre che nella proiezione il termine col laplaciano prevalga sul termine non lineare. Questa approssimazione porta all'equazione *lineare*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{R} \mathbb{P} \Delta \mathbf{v}$$

che è detta *equazione di Stokes* e corrisponde al sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{v} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

che rappresenta in modo piuttosto fedele il moto ad alta viscosità.

3.6 Fluidi non newtoniani

Abbiamo visto che nel caso generale di fluidi stokesiani l'equazione costitutiva del tensore di viscosità si scrive

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T} + p\mathbf{I} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2,$$

dove $p(x, y, z, t)$ è la pressione e α, β, γ sono funzioni degli invarianti principali di \mathbf{D} ovvero si suppone che α, β, γ siano funzioni soltanto di $\text{tr } \mathbf{D}, \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{D})^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^2)], \det \mathbf{D}$.

Ci poniamo per semplicità nel caso incomprimibile, per cui il primo invariante è nullo

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{tr } \mathbf{D} = 0,$$

e il secondo invariante diventa

$$-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{D}^2) = -\frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2.$$

Quindi in generale abbiamo un tensore di viscosità della forma

$$\mathbf{V} = \alpha(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D}) \mathbf{I} + \beta(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D}) \mathbf{D} + \gamma(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D}) \mathbf{D}^2.$$

Il caso lineare, in cui α e β sono costanti e $\gamma = 0$, porta all'equazione di Navier-Stokes. Ora invece siamo interessati a scelte diverse per le funzioni α, β, γ . Se torniamo all'espressione del tensore degli sforzi \mathbf{T} , introducendo una nuova pressione⁽¹⁴⁾ $\tilde{p} = p - \alpha$, otteniamo il modello generale dei cosiddetti *fluidi di Reiner-Rivlin*⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾:

$$\mathbf{T} = -\tilde{p} \mathbf{I} + \beta(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D}) \mathbf{D} + \gamma(|\mathbf{D}|, \det \mathbf{D}) \mathbf{D}^2,$$

che rappresenta il più generale modello di fluido stokesiano incomprimibile. Naturalmente le funzioni β, γ dovranno anche sottostare ad alcune restrizioni termodinamiche, che non specifichiamo.

Un caso particolare di fluidi di Reiner-Rivlin sono i cosiddetti *fluidi newtoniani generalizzati*, in cui si pone $\gamma = 0$ e si assume β indipendente da $\det \mathbf{D}$, per cui

$$\mathbf{T} = -\tilde{p} \mathbf{I} + \beta(|\mathbf{D}|) \mathbf{D}.$$

Tale scelta corrisponde, fisicamente, ad avere un fluido la cui viscosità cambia al variare di $|\mathbf{D}|$, quindi una viscosità dipendente dall'entità della parte simmetrica del gradiente di velocità. In questo caso le restrizioni termodinamiche portano semplicemente a richiedere che $\beta \geq 0$.

A questo punto si aprono svariate scelte per la funzione β ; noi discuteremo quella di una legge di potenza (*power-law fluids*), per cui

$$\beta(|\mathbf{D}|) = 2k|\mathbf{D}|^{s-2},$$

dove $k > 0$ è una costante dimensionale e $s > 1$ una costante adimensionale.⁽¹⁷⁾ In particolare:

- se $s < 2$, la viscosità decresce al crescere di $|\mathbf{D}|$ (fluidi *pseudoplastici* o *shear-thinning*);
- se $s > 2$, la viscosità cresce al crescere di $|\mathbf{D}|$ (fluidi *dilatanti* o *shear-thickening*).

Il caso $s = 2$ porta ai fluidi newtoniani. Scriviamo l'equazione del moto nel caso della legge di potenza: si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{div}(-\tilde{p} \mathbf{I} + 2k|\mathbf{D}|^{s-2} \mathbf{D}) = -\operatorname{grad} \tilde{p} + 2k \operatorname{div}(|\mathbf{D}|^{s-2} \mathbf{D}).$$

Quindi l'equazione finale è

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \tilde{p} + \frac{2k}{\rho_0} \operatorname{div}(|\mathbf{D}|^{s-2} \mathbf{D}). \quad (3.16)$$

⁽¹⁴⁾Nel caso incomprimibile la pressione non ha significato termodinamico, ma è data dal moltiplicatore di Lagrange del vincolo $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

⁽¹⁵⁾Markus REINER (Černivci, 5 gennaio 1886 – Haifa, 25 aprile 1976) è stato uno dei fondatori della *reologia*, la scienza che studia lo scorrimento dei fluidi sottoposti a forze esterne. È anche noto per avere introdotto il *numero di Deborah*, una quantità adimensionale che indica quanto un materiale sia più vicino a un fluido o a un solido. Il nome della quantità gli fu ispirato da un cantico della profetessa Debora nel libro dei Giudici della Bibbia, in cui la prima parte del versetto 5, cap. 5, potrebbe essere tradotta come “Le montagne fluirono davanti al Signore”.

⁽¹⁶⁾Ronald Samuel RIVLIN (Londra, 6 maggio 1915 – Palo Alto, 4 ottobre 2005) è stato un matematico applicato inglese, che poi acquisì anche cittadinanza statunitense. È considerato uno dei fondatori dell'Elasticità non lineare, nonché uno dei più grandi esperti di fluidi non Newtoniani.

⁽¹⁷⁾Se $s > \frac{3}{2}$, il numero positivo $n = 2s - 3$ è detto *indice di potenza* del fluido.

3.6.1 Moto laminare in un tubo rettilineo

Per semplificare l'equazione (3.16) studiamo l'esempio del moto laminare in un tubo. Supponiamo di avere un tubo rettilineo di sezione $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Il dominio diventa quindi $\Omega \times \mathbb{R}$. Denotiamo con (x, y) le coordinate in Ω e con z la coordinata lungo l'asse del tubo. Facciamo poi al seguente ipotesi fondamentale di *moto laminare*: il campo di velocità $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$ abbia componente soltanto lungo l'asse del tubo (asse z), ovvero

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = w(x, y, z, t)\mathbf{e}_z.$$

Quindi la funzione w diventa la nuova incognita.

Dal vincolo $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ si ottiene subito

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

e dunque w è funzione solo di x, y, t . Inoltre il termine convettivo si annulla:

$$(\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

quindi l'equazione del moto per questo problema particolare diventa

$$\frac{\partial w}{\partial t}\mathbf{e}_z = \mathbf{b} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \mathbb{T}$$

e non c'è più il vincolo della divergenza nulla.

Mettiamo ora nell'equazione la scelta costitutiva di legge di potenza fatta per \mathbb{T} :

$$\frac{\partial w}{\partial t}\mathbf{e}_z = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \tilde{p} + \frac{2k}{\rho_0} \operatorname{div}(|\mathbb{D}|^{s-2}\mathbb{D}),$$

e osserviamo che nel nostro caso

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{bmatrix},$$

quindi

$$|\mathbb{D}|^{s-2} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{(s-2)/2} = 2^{(2-s)/2} |\operatorname{grad} w|^{s-2}.$$

Proiettando l'equazione su \mathbf{e}_z si ottiene

$$\frac{\partial w}{\partial t} = b_z - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + 2^{(2-s)/2} \frac{k}{\rho_0} \operatorname{div} (|\operatorname{grad} w|^{s-2} \operatorname{grad} w). \quad (3.17)$$

Il termine

$$\Delta_s w \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div} (|\operatorname{grad} w|^{s-2} \operatorname{grad} w)$$

si chiama s -laplaciano della funzione di due variabili $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Mettiamoci ora nel caso speciale $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Proiettando l'equazione del moto sugli assi x e y , tenendo conto che w non dipende da z , si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0,$$

quindi \tilde{p} è funzione solo di z e t . Quindi nell'equazione (3.17) con $b_z = 0$ si ha la funzione w che dipende da x, y, t e la funzione $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$ che dipende da z, t . Questo significa che $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$ deve essere costante in z , ovvero

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = C(t).$$

La funzione $C(t)$ di solito viene determinata imponendo delle condizioni al contorno per la pressione, del tipo

$$\tilde{p}(z_0, t) = \tilde{p}_0(t), \quad \tilde{p}(z_1, t) = \tilde{p}_1(t),$$

e quindi

$$C(t) = \frac{\tilde{p}_1(t) - \tilde{p}_0(t)}{z_1 - z_0}.$$

L'equazione finale diventa

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{C(t)}{\rho_0} + 2^{(2-s)/2} \frac{k}{\rho_0} \operatorname{div} (|\operatorname{grad} w|^{s-2} \operatorname{grad} w), \quad (3.18)$$

dove $C(t)$ è una funzione nota.

Il caso $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ in generale non è semplice, ma si può arrivare ad un'equazione analoga alla (3.18) in alcuni casi notevoli tipo

$$\mathbf{b} = b_z(z) \mathbf{e}_z,$$

che include il caso di forza gravitazionale (anche non costante) su un tubo verticale.

3.6.2 Il caso unidimensionale e stazionario

Mettiamoci ora nel caso speciale unidimensionale in cui $\Omega = [0, h]$ e cerchiamo una soluzione stazionaria (quindi anche C non dipende dal tempo). Il problema (3.18) diventa

$$\begin{cases} (|w'|^{s-2} w')' = 2^{(s-2)/2} \frac{C}{k} & \text{in } [0, h] \\ w(0) = w(h) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Poniamo $A = 2^{(s-2)/2} \frac{C}{k}$, che è una costante legata al gradiente di pressione. Una prima integrazione dà

$$|w'|^{s-2} w' = Ax + a$$

e notiamo che $w' = 0$ per $x = -a/A$. Un'ulteriore integrazione dà

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{s-1}{sA} (Ax + a)^{\frac{s}{s-1}} + b_1 && \text{se } Ax + a \geq 0, \\ w(x) &= \frac{s-1}{sA} (-Ax - a)^{\frac{s}{s-1}} + b_2 && \text{se } Ax + a \leq 0. \end{aligned}$$

Se richiediamo che w sia continua in $x = -a/A$, otteniamo $b_1 = b_2 = b$ e

$$w(x) = \frac{s-1}{sA} |Ax + a|^{\frac{s}{s-1}} + b.$$

Ora imponiamo le condizioni al contorno $w(0) = w(h) = 0$:

$$\begin{cases} \frac{s-1}{sA} |a|^{\frac{s}{s-1}} + b = 0 \\ \frac{s-1}{sA} |Ah + a|^{\frac{s}{s-1}} + b = 0, \end{cases}$$

e, dopo alcuni conti, troviamo

$$a = -\frac{Ah}{2}, \quad b = -\frac{s-1}{sA} \left| \frac{Ah}{2} \right|^{\frac{s}{s-1}}.$$

La soluzione quindi è

$$w(x) = \frac{s-1}{sA} \left[\left| Ax - \frac{Ah}{2} \right|^{\frac{s}{s-1}} - \left| \frac{Ah}{2} \right|^{\frac{s}{s-1}} \right]. \quad (3.20)$$

In Figura 3.1 è rappresentata la funzione normalizzata $w(x)/|\max w(x)|$ per qualche valore di s . Si noti che per $s \rightarrow \infty$ il profilo della velocità tende verso un comportamento lineare, mentre per $s \rightarrow 1^+$ si può vedere la formazione al centro del tubo di un nucleo che trasla di moto rigido.

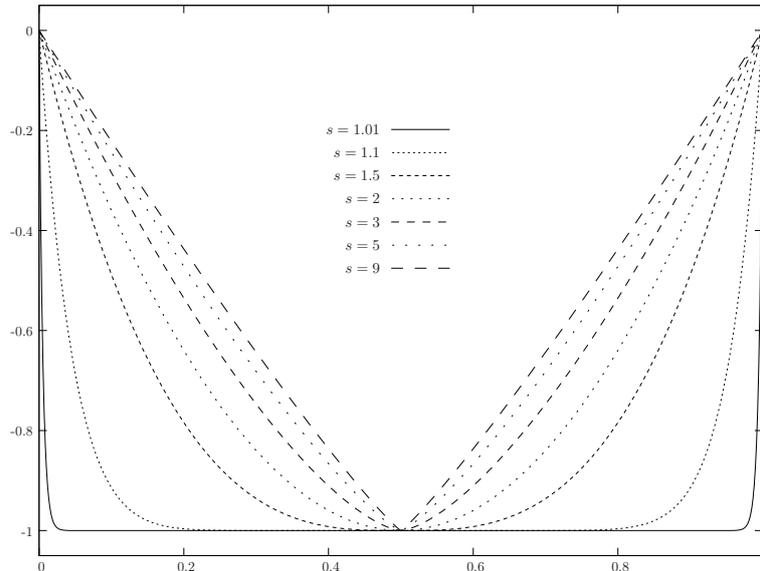


Figura 3.1: Il profilo della velocità per alcuni valori di s .

3.7 Complementi ed esercizi

Esercizio 3.1 (Flusso viscometrico piano). Esaminiamo il problema introdotto nell'esercizio 2.5, supponendo stavolta che il fluido sia newtoniano. Ovvero, un fluido newtoniano incomprimibile si muove in un piano tra le rette $y = 0$ e $y = h$ in assenza di forze esterne e $\mathbf{v}(x, y, t) = u(x, y, t)\mathbf{e}_1$ (moto di scorrimento semplice). Supponiamo che $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e che $p(0, y, t) = p_1$, $p(L, y, t) = p_2$. Inoltre supponiamo che la parete superiore scorra con velocità uniforme U mentre quella inferiore sia ferma, ovvero (per le condizioni di aderenza) $u(x, 0, t) = 0$ e $u(x, h, t) = U$. Cerchiamo le soluzioni *stazionarie* di questo problema.

Svolgimento. Dall'equazione di continuità si ha subito $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e dunque $u = u(y)$. L'equazione di Navier-Stokes proiettata sull'asse y dà $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, quindi $p = p(x)$. Studiamo la prima componente dell'equazione:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

quindi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Derivando rispetto a x si ha $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ e dunque

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C, \quad p(x) = Cx + p_1, \quad C = \frac{p_2 - p_1}{L}.$$

Dall'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C$ si ottiene poi

$$u(y) = \frac{C}{2\mu} y^2 + ay + b$$

e per le condizioni iniziali sulla u

$$u(y) = \frac{C}{2\mu} y^2 + \frac{1}{h} \left(U - \frac{C}{2\mu} h^2 \right) y. \quad (3.21)$$

Quindi si trova una soluzione stazionaria non banale, il cui profilo delle velocità è generalmente una parabola con asse orizzontale, tranne il caso $C = 0$, ovvero gradiente di pressione nullo, per cui $u(y) = \frac{U}{h}y$ e il profilo è una retta. In particolare, se anche la parete superiore è ferma, ovvero $U = 0$, si ha

$$u(y) = \frac{C}{2\mu} (y^2 - hy) = \frac{p_1 - p_2}{2L} y(h - y)$$

che è simmetrica rispetto alla retta $y = h/2$.

In generale possono esserci delle zone nel fluido a velocità nulla (dove si bilanciano l'azione del gradiente di pressione e del trascinamento della parete mobile): si ha infatti $u(y) = 0$ per

$$y = h - \frac{2\mu}{Ch} U$$

che appartiene alla striscia $0 < y < h$ nel caso in cui

$$UC > 0, \quad |U| < \frac{h^2}{2\mu} |C|.$$

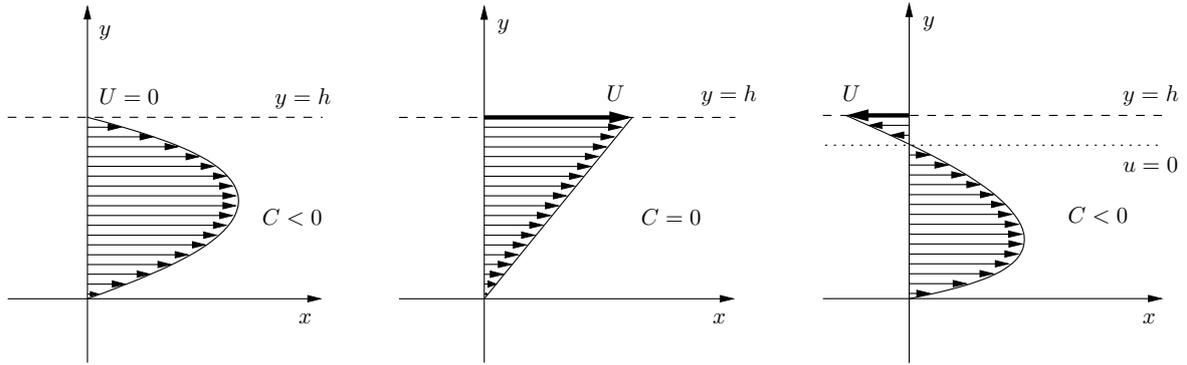


Figura 3.2: Profilo delle velocità nel moto di Poiseuille-Couette piano.

Può essere facilmente calcolata anche la portata⁽¹⁸⁾ di tale moto: si ha

$$P = \int_0^h u(y) dy = \dots = \frac{U}{2}h - \frac{C}{12\mu}h^3.$$

◇

Esercizio 3.2. Trovare il profilo del campo di velocità per il moto di Poiseuille in un tubo a sezione ellittica.

Svolgimento. Ricordiamo l'equazione cartesiana di un'ellisse centrata nell'origine con lunghezza dei semiassi orizzontale e verticale a e b rispettivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.22)$$

Vogliamo trovare un campo di velocità $\mathbf{v}(x, y) = w(x, y)\mathbf{e}_z$ avendo assegnato un gradiente di pressione costante $\text{grad } p(x, y, z) = C\mathbf{e}_z$. Le equazioni del moto diventano allora

$$\mu\Delta w = C, \quad (3.23)$$

con $w(x, y) = 0$ nei punti che soddisfano l'equazione (3.22).

Operiamo ora il cambio di coordinate $x' = x$, $y' = \frac{a}{b}y$, che mappa l'ellisse (3.22) su di una circonferenza di raggio a . In questo nuovo sistema di coordinate l'equazione (3.23) diventa

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} = \frac{C}{\mu},$$

di cui cerchiamo una soluzione a simmetria cilindrica $w(r)$ con $r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, che si annulli sulla circonferenza di raggio a . La scelta più semplice è

$$w(r) = c_1(r^2 - a^2) = c_1(x'^2 + y'^2 - a^2) \quad (3.24)$$

⁽¹⁸⁾Si veda la nota (22) nel capitolo precedente

con c_1 costante da determinarsi. Sostituendola nell'equazione si trova

$$c_1 = \frac{C}{2\mu} \frac{b^2}{a^2 + b^2}.$$

Poiché esiste effettivamente un valore di c_1 per cui la (3.24) soddisfa il nostro problema, abbiamo trovato la soluzione. Torniamo infine alle coordinate originali e otteniamo

$$w(x, y) = \frac{C}{2\mu} \frac{b^2}{a^2 + b^2} \left(x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) = \frac{C}{2\mu} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

che è la soluzione cercata.

◇

Capitolo 4

Stabilità e turbolenza nei fluidi newtoniani incomprimibili⁽¹⁾

A tutt'oggi non esiste una teoria soddisfacente, dal punto di vista matematico, del problema ai valori iniziali per il sistema di equazioni di Navier-Stokes in tre dimensioni per un fluido incomprimibile. In particolare, è noto che è possibile definire vari tipi di soluzioni, più o meno regolari, ma anche che se si richiede troppa regolarità, restringendo la classe di soluzioni ammissibili, si può dimostrare l'unicità ma non si riesce a dimostrare l'esistenza, mentre se si richiede poca regolarità, allargando quindi la classe di soluzioni ammissibili, si riesce a dimostrare l'esistenza ma non l'unicità. Sino ad oggi nessuno è riuscito a formulare una definizione adeguata di soluzione dimostrandone l'esistenza e l'unicità nella stessa classe di funzioni. In due dimensioni, invece, ciò è possibile, probabilmente grazie al fatto che la vorticità in due dimensioni ha direzione costante.

D'altro canto, anche se in linea di principio le difficoltà di cui sopra potrebbero essere ascrivibili al modello, non è ragionevole rinunciare a una teoria che prescindendo dalla buona formulazione del problema matematico. In questo senso si possono seguire due strade fondamentali: ragionare *a priori* sulle proprietà delle soluzioni, senza pretendere la certezza che esistano, o approssimare il problema risolvendo esattamente un problema più semplice, però rinunciando alla certezza che le soluzioni trovate approssimino qualcosa. Entrambe le strade si sono rivelate fruttuose e hanno portato ad una migliore comprensione della meccanica dei fluidi.

4.1 Stabilità

Quando si possiede la soluzione esatta ad un problema fisico, non è assolutamente detto che essa possa essere utile a qualcosa. Perché? Perché la modellizzazione e la schematizzazione matematica comportano necessariamente delle ipotesi semplificatrici, a vari livelli, che non saranno mai vere in laboratorio o nella realtà. Se quindi la soluzione trovata dipende in maniera essenziale da queste ipotesi, potrebbe essere assolutamente non osservabile. Per esempio, abbiamo già incontrato in (3.14) la soluzione di Poiseuille per il moto stazionario in un tubo cilindrico di raggio R soggetto a un gradiente di pressione C costante, in coordinate

⁽¹⁾La prima sezione di questo capitolo è a cura di Alfredo Marzocchi, che ringraziamo vivamente.

cilindriche:

$$\mathbf{v}(r) = -\frac{C}{4\mu}(R^2 - r^2)\mathbf{e}_1.$$

Ebbene, se la viscosità è alta e il gradiente di pressione basso tale soluzione si osserva, ma se la viscosità è bassa o il gradiente di pressione è alto no. In pratica, tale soluzione si osserva solo per bassi numeri di Reynolds. Eppure la soluzione esiste per ogni valore di C e μ . Quello che capita è che in laboratorio la sezione del tubo non sarà mai esattamente circolare, o il tubo rettilineo, o il moto stazionario, o il gradiente di pressione costante, per cui la soluzione *vera* sarà differente. Se quindi il moto di Poiseuille è *instabile*, si osserverà al suo posto una soluzione radicalmente diversa. Osserviamo anche che ciò non ha nulla a che fare con l'unicità della soluzione, che può esserci comunque.

In definitiva, una soluzione esatta, per essere osservabile, deve “cambiare di poco” quando “cambiano di poco” le condizioni iniziali o al contorno. Se poi questa caratteristica serve per un lasso limitato di tempo, si parla di *dipendenza continua dai dati*, mentre se deve mantenersi per tutto il tempo si parla di *stabilità*. In questo senso questi concetti non differiscono da quelli introdotti nella Meccanica dei sistemi a un numero finito di particelle. Vi è però una differenza di fondo: mentre in dimensione finita (come accade nella Meccanica delle particelle) vi è un unico concetto di intorno (infatti tutte le norme sono equivalenti), nella Meccanica dei fluidi il concetto di “soluzione vicina ad un'altra” può dipendere dalla norma scelta, e questa scelta è suggerita dal modello. Per questo enunciamo la definizione di stabilità senza riferimento a una precisa norma. Per semplicità, ci limitiamo anche al caso di un moto stazionario.

Definizione 4.1. Un moto stazionario \mathbf{v} di un fluido si dirà *stabile rispetto alle condizioni iniziali* se per ogni intorno V di \mathbf{v} esiste un intorno U di \mathbf{v} tale che per ogni condizione iniziale \mathbf{u}_0 in U si abbia per ogni $t \geq 0$ che la corrispondente soluzione $\mathbf{u}(t)$ appartenga a V .

Questa definizione è identica a quella della Meccanica delle particelle, con la differenza che nel nostro caso il moto \mathbf{v} è una funzione delle coordinate spaziali \mathbf{x} , e quindi appartiene a spazi di dimensione infinita. Naturalmente esiste la possibilità di studiare la stabilità rispetto ad altri dati assegnati, come il dominio, ma ci limiteremo rispetto a quella data sopra. Enunciamo anche la definizione di stabilità asintotica.

Definizione 4.2. Si dice che un moto stazionario \mathbf{v} di un fluido *attrae* un moto $\mathbf{u}(t)$, se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}.$$

Un moto stazionario \mathbf{v} si dirà *asintoticamente stabile rispetto alle condizioni iniziali*, se è stabile rispetto alle condizioni iniziali e se esiste un intorno U di \mathbf{v} tale che \mathbf{v} attragga ogni moto $\mathbf{u}(t)$ con condizione iniziale $\mathbf{u}_0 \in U$.

Quali metodi si possono applicare per studiare la stabilità di una soluzione stazionaria e incomprimibile delle equazioni di Navier-Stokes? E con quale norma? La prima idea è semplice: introdurre la *perturbazione*

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{4.1}$$

e studiarne il comportamento. La perturbazione è comoda perché, essendo \mathbf{v} stazionaria, le sue condizioni iniziali coincideranno con essa, col che

$$\mathbf{w}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

e dunque \mathbf{u}_0 apparterrà a un intorno di \mathbf{v} se e solo se \mathbf{w}_0 apparterrà a un intorno di zero.

Poi, siccome sia \mathbf{v} che \mathbf{u} rappresentano soluzioni del problema, e inoltre \mathbf{v} è stazionaria, si deve avere

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Le funzioni \mathbf{v} e \mathbf{u} devono poi soddisfare l'equazione di Navier-Stokes, che scriviamo nella forma adimensionale e in assenza di forze esterne

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} &= -\operatorname{grad} P + \frac{1}{R}\Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})\mathbf{u} &= -\operatorname{grad} p + \frac{1}{R}\Delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

dove ovviamente P è la pressione per il moto \mathbf{v} (divisa per ρ_0), p quella per il moto \mathbf{u} e R il numero di Reynolds. Si supponrà che il moto avvenga in un dominio limitato $\Omega(t)$ con le solite condizioni di aderenza alle pareti. Sottraendo la prima equazione dalla seconda, otteniamo

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})\mathbf{u} - (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \pi + \frac{1}{R}\Delta \mathbf{w}$$

dove abbiamo posto $\pi = p - P$. Ora, siccome $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, abbiamo

$$(\operatorname{grad} \mathbf{u})\mathbf{u} - (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} = (\operatorname{grad} \mathbf{w})\mathbf{w} + (\operatorname{grad} \mathbf{w})\mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

e quindi in definitiva si trova per \mathbf{w} l'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{w})\mathbf{w} + (\operatorname{grad} \mathbf{w})\mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{w} = -\operatorname{grad} \pi + \frac{1}{R}\Delta \mathbf{w}. \quad (4.2)$$

Infine, siccome \mathbf{v} e \mathbf{u} sono soluzioni dello stesso problema (con condizioni iniziali diverse ma con le stesse condizioni al contorno), sul bordo $\partial\Omega$ del dominio nel quale avviene il moto assumeranno gli stessi valori, dunque avremo l'ulteriore condizione

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (4.3)$$

4.1.1 Stabilità in norma dell'energia

Per studiare la stabilità, c'è una norma "naturale" che si presenta, ossia l'energia cinetica totale del moto (divisa per la densità)

$$\|\mathbf{w}(t)\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} K(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)|^2 dx$$

che coincide con la norma nello spazio L^2 della soluzione (nelle variabili spaziali).

Per trovare un'equazione per l'energia cinetica, moltiplichiamo scalarmente per \mathbf{w} l'equazione (4.2) e integriamo su Ω , osservando che

$$K'(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \cdot \mathbf{w} dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} + (\operatorname{grad} \mathbf{w})\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \right) dx$$

dal Teorema del trasporto e l'incomprimibilità.⁽²⁾ Dalla condizione $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ si ha poi

$$(\operatorname{grad} \mathbf{w}) \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{w})' \mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad}(w^2) = \frac{1}{2} \operatorname{div}(w^2 \mathbf{w}),$$

e integrando su Ω , dal teorema della divergenza e la condizione (4.3) troviamo

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} \mathbf{w}) \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} w^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0.$$

Infine abbiamo, in maniera analoga,

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} \pi \cdot \mathbf{w} \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\pi \mathbf{w}) \, dx - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \mathbf{w} \, dx = \int_{\partial \Omega} \pi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

e, usando la (A.16),

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \, dx = \int_{\Omega} [\operatorname{div}((\operatorname{grad} \mathbf{w})' \mathbf{w}) - |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2] \, dx = \int_{\Omega} -|\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx$$

Dopo tutti questi passaggi, dalla (4.2) otteniamo

$$K'(\mathbf{w}) = - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{w} \, dx - \frac{1}{R} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx. \quad (4.4)$$

Questa equazione è particolarmente suggestiva anche in sé: infatti mostra che la variazione nel tempo dell'energia cinetica della perturbazione del moto "base" \mathbf{v} è pari alla somma di un termine sempre negativo, dovuto alla viscosità e di un termine a segno non definito, legato anche al moto base \mathbf{v} .

D'ora in poi supponiamo Ω limitato e poniamo

$$F[\mathbf{v}; \mathbf{w}] = - \frac{\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{w} \, dx}{\int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx}.$$

Una volta fissato il moto base \mathbf{v} , F è un funzionale in \mathbf{w} limitato. Infatti, siccome il dominio è limitato e \mathbf{w} è nulla al bordo, vale la cosiddetta *disuguaglianza di Poincaré*:⁽³⁾

$$\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 \, dx \leq C_{\Omega} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx \quad (4.5)$$

dove C_{Ω} è una costante positiva che dipende solo dalla misura di Ω . Quindi si ha

$$|F[\mathbf{v}; \mathbf{w}]| \leq \|\operatorname{grad} \mathbf{v}\|_{\infty} \frac{\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{w}|^2 \, dx} \leq C_{\Omega} \|\operatorname{grad} \mathbf{v}\|_{\infty}. \quad (4.6)$$

Possiamo porre allora

$$\frac{1}{R^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{w}} F[\mathbf{v}; \mathbf{w}] \quad (4.7)$$

⁽²⁾In realtà si può dimostrare che

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} \mathbf{w}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dx = 0,$$

anche se non ci serve.

⁽³⁾Jules Henri POINCARÉ (Nancy, 29 aprile 1854 – Parigi, 17 luglio 1912) è stato matematico, fisico e filosofo. Considerato tra i più grandi pensatori del XIX secolo, viene anche ritenuto l'ultima persona che fu in grado di dominare tutti i campi della matematica nota nel suo tempo.

e riscrivere la (4.4) così:

$$0 = K'(\mathbf{w}) + \left(\frac{1}{R} - F[\mathbf{v}; \mathbf{w}] \right) \int_{\Omega} |\text{grad } \mathbf{w}|^2 dx \geq K'(\mathbf{w}) + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right) \int_{\Omega} |\text{grad } \mathbf{w}|^2 dx$$

ossia equivalentemente

$$K'(\mathbf{w}) \leq - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right) \int_{\Omega} |\text{grad } \mathbf{w}|^2 dx. \quad (4.8)$$

Da questa equazione si vede che se $R < R^*$, allora l'energia cinetica della perturbazione decresce nel tempo. Ma c'è di più: utilizzando di nuovo la disuguaglianza di Poincaré, se $R < R^*$ si ottiene

$$K'(\mathbf{w})(t) \leq - \frac{2}{C_{\Omega}} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right) K(\mathbf{w})(t)$$

da cui segue subito, integrando,

$$K(\mathbf{w})(t) \leq K(\mathbf{w})(0) \exp \left(- \frac{2}{C_{\Omega}} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right) t \right).$$

Da qui si vede subito la stabilità asintotica rispetto alla norma dell'energia. Infatti, se $K(\mathbf{w})(0) < \delta$, si avrà $K(\mathbf{w})(t) < \delta$ per ogni $t \geq 0$. Inoltre, se $t \rightarrow +\infty$, è evidente che $K(\mathbf{w})(t) \rightarrow 0$.

La determinazione del valore critico R^* dipende dalla soluzione del problema di massimo (4.7). Esso dipende dal tipo di soluzione \mathbf{v} che si sta studiando, ma non è un problema molto difficile. Poiché esso comunque coinvolge la soluzione di problemi legati a equazioni differenziali, non ci addenteremo in questo argomento. Osserviamo comunque che dalla (4.6) segue

$$\frac{1}{R^*} \leq C_{\Omega} \|\text{grad } \mathbf{v}\|_{\infty},$$

e dunque una condizione sufficiente per avere la stabilità è

$$R < \frac{1}{C_{\Omega} \|\text{grad } \mathbf{v}\|_{\infty}}.$$

Sottolineiamo inoltre il fatto che la condizione $R < R^*$ è sufficiente per avere la stabilità, ma non è necessaria: sperimentalmente si osserva spesso un regime di stabilità anche per numeri di Reynolds maggiori di R^* ; se siamo quindi interessati a trovare valori critici che caratterizzino l'instabilità del moto, dobbiamo introdurre altri metodi di analisi.

4.1.2 Metodo della linearizzazione

Supponiamo di avere un operatore differenziale non lineare F ed il problema evolutivo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = F(\mathbf{u})$$

corredato di opportune condizioni iniziali ed al bordo. Assumiamo poi che la funzione incognita $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ appartenga ad uno spazio vettoriale su cui è possibile definire una norma. Se siamo in possesso di una soluzione stazionaria $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ del problema per essa vale ovviamente

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0} = F(\mathbf{v});$$

inoltre possiamo considerare il problema linearizzato intorno alla soluzione stazionaria

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = F'[\mathbf{v}]\mathbf{w}, \quad (4.9)$$

dove $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ è ancora la perturbazione $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ed $F'[\mathbf{v}]$ è il differenziale di F secondo Fréchet⁽⁴⁾, calcolato in \mathbf{v} , che risulta essere un operatore lineare per definizione.

In quasi tutti i casi di interesse applicativo, le autofunzioni $\psi_k(\mathbf{x})$ di $F'[\mathbf{v}]$ costituiscono un sistema ortonormale completo nello spazio di funzioni che interessa; sotto tale ipotesi possiamo decomporre in *modi normali* la perturbazione scrivendo

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \psi_k(\mathbf{x}).$$

Sostituendo nell'equazione (4.9) e denotando con c_k l'autovalore relativo a ψ_k si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial a_k(t)}{\partial t} - c_k a_k(t) \right) \psi_k(\mathbf{x}) = 0,$$

che, considerando l'ortogonalità dei modi normali, diventa

$$\frac{\partial a_k(t)}{\partial t} - c_k a_k(t) = 0$$

per ogni k , ossia $a_k(t) = a_k(0)e^{c_k t}$. L'autovalore $c_k = \alpha_k + i\beta_k$ è in generale un numero complesso; la sua parte immaginaria β_k è detta *frequenza*, mentre la sua parte reale α_k è detta *tasso di crescita* perché si ha

$$\operatorname{Re}(a_k(t)) = a_k(0)e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t), \quad (4.10)$$

ossia la parte reale dei coefficienti dello sviluppo in modi normali (che è quella rilevante per il moto fisico) presenta un andamento nel tempo oscillante di frequenza β_k la cui ampiezza è legata a α_k .

Dalla soluzione (4.10) capiamo subito che, se tutti gli autovalori dell'operatore $F'[\mathbf{v}]$ hanno parte reale strettamente negativa, la perturbazione viene smorzata e la soluzione stazionaria $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ risulta asintoticamente stabile; se esiste anche solo un autovalore con parte reale strettamente positiva, le oscillazioni relative a quel modo normale vengono esponenzialmente amplificate e la soluzione stazionaria risulta instabile. Se infine qualche autovalore ha parte reale nulla e tutti gli altri strettamente negativa, il moto stazionario si dice *linearmente stabile*, ma il carattere non lineare del problema originale fa sì che tale condizione non garantisca l'effettiva stabilità della soluzione $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Applichiamo ora questo metodo all'equazione di Navier-Stokes in un caso particolare. Consideriamo infatti i cosiddetti *moti piani paralleli*, che sono dei moti laminari stazionari in cui il campo di velocità è tutto parallelo ad una direzione \mathbf{e}_x e può variare in intensità e

⁽⁴⁾Maurice René FRÉCHET (Maligny, 2 settembre 1878 – Parigi, 4 giugno 1973) diede importanti contributi alla teoria dei funzionali in spazi astratti. Durante la prima guerra mondiale fu arruolato come interprete dall'esercito britannico, lavorando spesso in prossimità del fronte. Riuscì tuttavia a produrre importanti lavori di ricerca anche in tali condizioni. Dal 1950 al 1953 fu anche presidente della *Internacia Scienca Asocio Esperantista*.

verso solo lungo una direzione \mathbf{e}_y ad essa ortogonale. La soluzione stazionaria di cui vogliamo studiare la stabilità è allora $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = U(y)\mathbf{e}_x$ e scriviamo la perturbazione come

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = u(x, y, z, t)\mathbf{e}_x + v(x, y, z, t)\mathbf{e}_y + w(x, y, z, t)\mathbf{e}_z.$$

Il problema linearizzato (4.9) nel caso di Navier-Stokes risulta

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -(\text{grad } \mathbf{w})\mathbf{v} - (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{w} - \text{grad } \pi + \frac{1}{R}\Delta \mathbf{w}$$

e, specializzando alle nostre \mathbf{v} e \mathbf{w} , si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{1}{R}\Delta u \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{1}{R}\Delta v \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{1}{R}\Delta w \quad (4.13)$$

cui aggiungiamo l'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.14)$$

Osserviamo che questo sistema di equazioni lineari dipende parametricamente dal numero di Reynolds; possiamo quindi aspettarci che anche gli autovalori dell'operatore linearizzato e, più in generale, le proprietà di stabilità del moto stazionario dipendano da R .

Poiché il sistema (4.11)–(4.14) è autonomo in x, z, t (cioè non si ha dipendenza esplicita da tali variabili) esso è invariante per traslazioni lungo tali direzioni e possiamo avere dei vantaggi effettuando la trasformata di Fourier⁽⁵⁾ in x, z, t . In tal modo si ha

$$\hat{f}(y, k_x, k_z, \omega) = \int f(x, y, z, t) e^{-i(k_x x + k_z z - \omega t)} dx dz dt$$

ed il sistema diventa

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{u} + ik_x U \hat{u} + \hat{v} \frac{dU}{dy} &= -ik_x \hat{\pi} + \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 \hat{u}}{dy^2} - k_x^2 \hat{u} - k_z^2 \hat{u} \right) \\ -i\omega \hat{v} + ik_x U \hat{v} &= -\frac{d\hat{\pi}}{dy} + \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} - k_x^2 \hat{v} - k_z^2 \hat{v} \right) \\ -i\omega \hat{w} + ik_x U \hat{w} &= -ik_z \hat{\pi} + \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 \hat{w}}{dy^2} - k_x^2 \hat{w} - k_z^2 \hat{w} \right) \\ \frac{d\hat{v}}{dy} + ik_x \hat{u} + ik_z \hat{w} &= 0 \end{aligned}$$

⁽⁵⁾Jean Baptiste Joseph FOURIER (Auxerre, 21 marzo 1768 – Parigi, 16 maggio 1830) oltre ad aver dato importanti contributi alla fisica matematica, ricoprì diverse cariche pubbliche durante e dopo la rivoluzione francese. Fu il primo a dimostrare che la temperatura sulla terra dovrebbe essere molto più bassa se dovuta solo all'irraggiamento solare ed analizzò quali fenomeni potessero spiegare le temperature reali, dando in questo modo inizio agli studi sull'effetto serra.

che risulta algebrico in tutte le variabili eccetto y . L'operazione effettuata corrisponde ad una decomposizione della perturbazione in modi normali lungo le direzioni x, z, t , ottenuta mediante trasformata anziché serie.

Si può dimostrare che le perturbazioni con numero d'onda $k_x \neq 0$ che generano per prime instabilità al crescere del numero di Reynolds, oppure, nel caso non viscoso, risultano maggiormente amplificate dal flusso, sono quelle con $k_z = 0$ e $w = 0$ conseguentemente, che sono moti piani. Dato che a noi interessa soprattutto la più bassa soglia di instabilità ci restringeremo allora a tale caso ponendo $k_x = k$ e studiando il seguente sistema ridotto:

$$ik(U - c)\hat{u} + \hat{v}\frac{dU}{dy} = -ik\hat{\pi} + \frac{1}{R}\left(\frac{d^2\hat{u}}{dy^2} - k^2\hat{u}\right) \quad (4.15)$$

$$ik(U - c)\hat{v} = -\frac{d\hat{\pi}}{dy} + \frac{1}{R}\left(\frac{d^2\hat{v}}{dy^2} - k^2\hat{v}\right) \quad (4.16)$$

$$\frac{d\hat{v}}{dy} + ik\hat{u} = 0 \quad (4.17)$$

dove abbiamo introdotto la *velocità di fase* $c = \omega/k$, che in generale è un numero complesso.

Poiché la perturbazione è un moto piano incompressibile possiamo considerare una funzione di corrente $\psi(x, y)$ tale che $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ e $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ per cui l'equazione di continuità rot grad $\psi = 0$ risulta automaticamente soddisfatta.

Valgono inoltre le seguenti identità: $\hat{u} = \frac{d\hat{\psi}}{dy}$ e $\hat{v} = -ik\hat{\psi}$. Sostituendo, il sistema (4.15)–(4.17) diventa

$$ik(U - c)\frac{d\hat{\psi}}{dy} - ik\hat{\psi}\frac{dU}{dy} = -ik\hat{\pi} + \frac{1}{R}\left(\frac{d^3\hat{\psi}}{dy^3} - k^2\frac{d\hat{\psi}}{dy}\right) \quad (4.18)$$

$$k^2(U - c)\hat{\psi} = -\frac{d\hat{\pi}}{dy} + \frac{1}{R}\left(-ik\frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} + ik^3\hat{\psi}\right) \quad (4.19)$$

da cui si può facilmente eliminare la pressione derivando rispetto a y la prima equazione e sottraendole la seconda moltiplicata per ik .

Tale operazione produce l'equazione di Orr-Sommerfeld⁽⁶⁾⁽⁷⁾:

$$(U - c)\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\hat{\psi} - \frac{d^2U}{dy^2}\hat{\psi} = \frac{1}{ikR}\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^2\hat{\psi}. \quad (4.20)$$

Quest'equazione differenziale ordinaria del quart'ordine richiede quattro condizioni ai limiti che sono ottenute imponendo l'aderenza del fluido alle pareti piane definite da $y = y_{max}$ e $y = y_{min}$: $u = v = 0$ sulle pareti diventa

$$0 = k\hat{\psi}(y_{min}) = k\hat{\psi}(y_{max}) = \frac{d\hat{\psi}}{dy}(y_{min}) = \frac{d\hat{\psi}}{dy}(y_{max}).$$

⁽⁶⁾William McFadden ORR (Comber, 2 maggio 1866 – Dublino, 14 agosto 1934) compì numerosi studi di fisica matematica e sulle funzioni speciali. La sua grande influenza sul pensiero scientifico del suo tempo fu mediata non da famose scoperte, ma da un fitto epistolario, che lo teneva in stretto contatto con moltissimi matematici e fisici importanti.

⁽⁷⁾Arnold Johannes Wilhelm SOMMERFELD (Königsberg, 5 dicembre 1868 – Monaco, 26 aprile 1951) fu uno dei pionieri della fisica atomica e quantistica. Nessuno ha mai avuto tanti premi Nobel tra i propri allievi quanti ne ebbe lui, ed egli stesso fu più volte proposto per tale onorificenza.

Nel caso non viscoso, oppure per $R \rightarrow +\infty$, la (4.20) diventa l'equazione di Rayleigh⁽⁸⁾

$$(U - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \hat{\psi} - \frac{d^2 U}{dy^2} \hat{\psi} = 0, \quad (4.21)$$

cui possiamo aggiungere soltanto le condizioni di impenetrabilità alle pareti

$$k\hat{\psi}(y_{min}) = k\hat{\psi}(y_{max}) = 0.$$

4.1.3 Instabilità delle discontinuità tangenziali

Nel contesto dei moti piani paralleli di un fluido perfetto è possibile considerare soluzioni stazionarie $U(y)e_x$ in cui la funzione $U(y)$ sia lineare a tratti ed anche discontinua, ossia

$$U(y) = U^{(j)}(y) = a^{(j)} + b^{(j)}y \quad \text{per } y \in [y_j, y_{j+1}],$$

dove i punti y_j generano una suddivisione dell'intervallo $[y_{min}, y_{max}]$.

Chiaramente le discontinuità di $U(y)$ possono trovarsi solo in corrispondenza dei piani definiti da $y = y_j$, e sono dette *discontinuità tangenziali* perché interessano la componente del campo di velocità tangente al piano che divide due regioni di fluido in moto regolare. Tali superfici di separazione si possono considerare delle zone dove si concentra la vorticità di un moto che risulta irrotazionale in tutto il resto del dominio, ma non utilizzeremo questo punto di vista.

Studieremo invece la stabilità di tali moti, possibili solo in un contesto privo di sforzi di taglio, mediante l'equazione di Rayleigh e ne mostreremo l'instabilità in un caso particolare; questo fenomeno è detto *instabilità di Kelvin-Helmholtz*. Troveremo inoltre una *relazione di dispersione*, dipendente dal moto in oggetto, che seleziona tra tutte le velocità di fase c quelle per cui è effettivamente possibile la propagazione della perturbazione.

Per velocità lineari a tratti l'equazione (4.21) risulta semplicemente

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \hat{\psi} = 0$$

su ciascun sottointervallo $[y_j, y_{j+1}]$, da cui immediatamente

$$\hat{\psi}^{(j)} = A_-^{(j)} e^{-ky} + A_+^{(j)} e^{ky}.$$

Dobbiamo poi imporre la continuità della pressione $\hat{\pi}$ lungo le superfici di discontinuità tangenziale. Dall'equazione (4.18), ricordando $R \rightarrow +\infty$, si ha

$$\begin{aligned} \left[\hat{\psi}^{(j)} b^{(j)} - (a^{(j)} + b^{(j)}y - c) \frac{d\hat{\psi}^{(j)}}{dy} \right]_{y=y_{j+1}} &= \\ &= \left[\hat{\psi}^{(j+1)} b^{(j+1)} - (a^{(j+1)} + b^{(j+1)}y - c) \frac{d\hat{\psi}^{(j+1)}}{dy} \right]_{y=y_{j+1}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

⁽⁸⁾ John William STRUTT barone di Rayleigh (Langford Grove, 12 novembre 1842 – Witham, 30 giugno 1919) poliedrico scienziato, vinse nel 1904 il premio Nobel per la fisica. Sfruttò la propria agiatezza economica per dedicarsi ad importanti ricerche sperimentali, che seppe accompagnare a lucide analisi teoriche. A lui sono stati dedicati un cratere sulla Luna ed uno su Marte.

per ogni j . Ma ad ogni j corrispondono due costanti arbitrarie e quindi necessitiamo di un'altra serie di condizioni, che si ottiene imponendo la continuità della componente v ortogonale alla superficie di discontinuità.

Un punto materiale sulla j -esima superficie di discontinuità soddisfa l'equazione $y = y_j$. La velocità di tale punto nella direzione ortogonale alla superficie è per definizione

$$v = \frac{dy_j}{dt} = \frac{\partial y_j}{\partial t} + U(y) \frac{\partial y_j}{\partial x}.$$

Passando ai modi normali mediante trasformata di Fourier si ha $\hat{v} = -i\omega\hat{y}_j + ikU(y)\hat{y}_j$ e quindi

$$ik(U(y) - c)\hat{y}_j = -ik\hat{\psi}, \quad \text{ossia} \quad (U(y) - c)\hat{y}_j = -\hat{\psi},$$

da cui si ricavano le condizioni di continuità

$$\left[\frac{\hat{\psi}^{(j)}}{a^{(j)} + b^{(j)}y - c} \right]_{y=y_{j+1}} = \left[\frac{\hat{\psi}^{(j+1)}}{a^{(j+1)} + b^{(j+1)}y - c} \right]_{y=y_{j+1}} \quad (4.23)$$

per ogni j . Chiaramente in y_{min} e y_{max} , che possono eventualmente tendere all'infinito, imponremo le condizioni di impenetrabilità.

Il sistema lineare dato dalle (4.22)–(4.23) è omogeneo nelle costanti $A_{\pm}^{(j)}$, quindi dovremo imporre la condizione di esistenza di soluzioni non banali, che si tradurrà nella legge di dispersione per le velocità di fase ammissibili.

Applichiamo ora questa analisi ad un caso molto semplice:

$$U(y) = \begin{cases} U_2 = U_0 + \frac{1}{2}\Delta U & \text{se } y > 0 \\ U_1 = U_0 - \frac{1}{2}\Delta U & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

dove U_2 e U_1 sono costanti e $\Delta U = U_2 - U_1$.

Le condizioni al bordo diventano

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \hat{\psi}^{(1)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \hat{\psi}^{(2)} = 0,$$

da cui subito $A_-^{(1)} = A_+^{(2)} = 0$. Il sistema (4.22)–(4.23) diventa

$$\begin{aligned} k(U_1 - c)A_+^{(1)} &= -k(U_2 - c)A_-^{(2)} \\ \frac{1}{U_1 - c}A_+^{(1)} &= \frac{1}{U_2 - c}A_-^{(2)} \end{aligned}$$

ed ammette soluzioni non banali se

$$(U_1 - c)^2 + (U_2 - c)^2 = 0,$$

da cui la legge di dispersione

$$\frac{\omega}{k} = c = U_0 \pm i\frac{1}{2}\Delta U.$$

Utilizzando ora l'antitrasformata di Fourier abbiamo

$$\mathbf{w}(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int \hat{\mathbf{w}}(k, y, \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\mathbf{w}}(k, y) e^{\pm \frac{1}{2}k\Delta U t} e^{i(kx - U_0 kt)} dk$$

dove la frequenza ω è stata eliminata usando la legge di dispersione. Da questa espressione della perturbazione vediamo che, se $\Delta U \neq 0$, abbiamo sicuramente dei contributi divergenti per $t \rightarrow +\infty$, quindi il moto stazionario considerato è instabile.

Osserviamo che in questo caso tutti i modi normali si propagano con la medesima velocità di fase. Questo non è più vero se si considera una porzione di spazio dove le y sono contenute in $[y_{min}, y_{max}]$ con $y_{min} < 0 < y_{max}$ ed un profilo di velocità come (4.24).

Ora le condizioni al bordo e di continuità diventano

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^{(1)}(y_{min}) &= A_-^{(1)} e^{-ky_{min}} + A_+^{(1)} e^{ky_{min}} = 0 \\ \hat{\psi}^{(2)}(y_{max}) &= A_-^{(2)} e^{-ky_{max}} + A_+^{(2)} e^{ky_{max}} = 0 \\ \frac{A_-^{(1)} + A_+^{(1)}}{U_1 - c} &= \frac{A_-^{(2)} + A_+^{(2)}}{U_2 - c} \\ k(U_1 - c)(A_-^{(1)} - A_+^{(1)}) &= k(U_2 - c)(A_-^{(2)} - A_+^{(2)})\end{aligned}$$

da cui ricaviamo $A_-^{(1)} = -A_+^{(1)} e^{2ky_{min}}$, $A_-^{(2)} = -A_+^{(2)} e^{2ky_{max}}$ e

$$\begin{aligned}(U_2 - c)(1 - e^{2ky_{min}})A_+^{(1)} &= (U_1 - c)(1 - e^{2ky_{max}})A_+^{(2)} \\ (U_1 - c)(1 + e^{2ky_{min}})A_+^{(1)} &= (U_2 - c)(1 + e^{2ky_{max}})A_+^{(2)}\end{aligned}$$

che richiede la condizione di esistenza di soluzioni non banali

$$(U_2 - c)^2(1 + e^{2ky_{max}} - e^{2ky_{min}} - e^{2k(y_{min} + y_{max})}) = (U_1 - c)^2(1 - e^{2ky_{max}} + e^{2ky_{min}} - e^{2k(y_{min} + y_{max})}).$$

Con un po' di pazienza si ricava la legge di dispersione

$$\frac{\omega}{k} = c = U_0 + \frac{1}{2}f(k)\Delta U \pm \frac{1}{2}\Delta U \sqrt{f(k)^2 - 1}, \quad (4.25)$$

dove è presente la funzione del numero d'onda

$$f(k) = \frac{1 - e^{2k(y_{min} + y_{max})}}{e^{2ky_{max}} - e^{2ky_{min}}}.$$

Osserviamo che, se $y_{min} = -y_{max}$, allora $f(k) \equiv 0$ e riotteniamo la legge di dispersione precedente, ma se ci poniamo in una situazione non simmetrica la velocità di fase c dipende effettivamente dal numero d'onda, cioè modi normali con diverso k oscillano o vengono amplificati e smorzati in modo diverso. Ora, poiché

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} f(k) = 0,$$

esistono sicuramente dei modi normali per cui $\pm \text{Im } c \neq 0$; quindi abbiamo anche in questo caso dei contributi alla perturbazione che vengono amplificati nel tempo: il moto stazionario considerato è instabile.

4.1.4 Stabilità dei flussi rotatori

Utilizziamo ora una terza tecnica per l'analisi della stabilità del moto laminare di un fluido trascinato da due cilindri coassiali di raggi $R_1 < R_2$ che ruotano con frequenze angolari Ω_1 e

Ω_2 rispettivamente. La soluzione per il moto di Couette, introdotta nella sezione 3.4.1, dà in questo caso la seguente velocità tangenziale, funzione della coordinata radiale:

$$U_{\vartheta}(r) = r\dot{\vartheta}(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Nel moto imperturbato ogni volumetto infinitesimo di fluido posto a distanza r dall'asse dei cilindri si muove di moto circolare uniforme, avendo momento angolare $L(r) = mr^2\dot{\vartheta}$ (m è una costante con le dimensioni di una massa). Ciò significa che la forza centrifuga $\mathbf{F}_c = mr\dot{\vartheta}^2 \mathbf{e}_r$ che tale volumetto sperimenta è esattamente bilanciata dal gradiente di pressione che spinge in direzione centripeta. Notiamo inoltre che la forza centrifuga è legata al momento angolare mediante la relazione $|\mathbf{F}_c| = L^2/mr^3$.

Per valutare la stabilità del moto laminare, possiamo allora pensare di allontanare di poco il volumetto infinitesimo di fluido dall'asse e calcolare quali forze agiscono su di lui: se esse tendono a riportarlo alla sua posizione originale, il moto laminare è stabile, altrimenti no. In questo ragionamento trascureremo gli effetti della viscosità, ottenendo risultati validi nel limite di grandi numeri di Reynolds.

Supponiamo di avere un volumetto di fluido inizialmente a distanza r_0 dall'asse dei cilindri e che esso venga spostato, per effetto di una perturbazione, alla distanza $r > r_0$. Ora dobbiamo sommare la forza centrifuga, espressa in funzione del momento angolare del volumetto di fluido $L(r_0)$ invariato durante la perturbazione, alla forza centripeta che il gradiente di pressione esercita alla distanza r , espressa in funzione della forza centrifuga da essa bilanciata. Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del moto laminare $U_{\vartheta}(r)$ è che la risultante di tali forze sia diretta verso l'asse del cilindro, ossia dobbiamo imporre che

$$\frac{L(r_0)^2}{mr^3} - \frac{L(r)^2}{mr^3} < 0, \quad \text{da cui} \quad L(r)^2 - L(r_0)^2 > 0.$$

Vogliamo linearizzare tale condizione intorno ad r_0 . Consideriamo quindi lo sviluppo di Taylor del momento angolare

$$L(r) = L(r_0) + \left. \frac{dL}{dr} \right|_{r_0} (r - r_0) + o(r - r_0),$$

ed il suo quadrato

$$L(r)^2 = L(r_0)^2 + \left[L(r) \frac{dL}{dr} \right]_{r_0} (r - r_0) + o(r - r_0).$$

La condizione di stabilità diventa allora:

$$\forall r \in [R_1, R_2] : L(r) \frac{dL}{dr} > 0. \quad (4.26)$$

A questo punto si può sostituire l'espressione del momento angolare in funzione di r , sfruttando la soluzione che dà $r\dot{\vartheta}$. Semplificando poi tutte le quantità certamente positive nella disuguaglianza, la condizione (4.26) diventa

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \dot{\vartheta}(r) > 0.$$

Osserviamo subito che $\dot{\vartheta}(r)$ è una funzione monotona sull'intervallo $[R_1, R_2]$ che assume i valori Ω_1 e Ω_2 negli estremi; allora, se i cilindri ruotano in direzioni opposte ($\Omega_1 \Omega_2 < 0$), $\dot{\vartheta}(r)$ deve

necessariamente cambiare segno e così anche il suo prodotto per la costante $(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)$: in questo caso il moto laminare è instabile. Se invece $\Omega_1 \Omega_2 > 0$, possiamo scegliere il loro verso di rotazione come positivo, ottenendo $\dot{\vartheta} > 0$ su tutto l'intervallo e la condizione di stabilità

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2,$$

da cui vediamo, ad esempio, che nel limite $\Omega_1 \rightarrow 0$ il moto di Couette è stabile, mentre nel limite $\Omega_2 \rightarrow 0$ è instabile.

Uno studio della stabilità della soluzione di Couette che tenga conto degli effetti della viscosità può essere effettuato con il metodo della linearizzazione. Discutiamo ora brevemente i risultati che si ottengono.

Si considerano perturbazioni tridimensionali, ma indipendenti dall'angolo ϑ e, poiché il sistema linearizzato è autonomo rispetto alle variabili z, t , si ha una soluzione per la perturbazione della forma

$$\mathbf{w}(r, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int \hat{\mathbf{w}}(r, k, \omega) e^{-i(kz - \omega t)} dk d\omega, \quad (4.27)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è il numero d'onda in direzione assiale, ed $\omega \in \mathbb{C}$ è la frequenza. Imponendo l'esistenza di una perturbazione non nulla, si ottiene la legge di dispersione che permette di esprimere ω in funzione di k . Inserendola nella (4.27) e separando i contributi della parte reale ed immaginaria di ω , si ha

$$\mathbf{w}(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\mathbf{w}}(r, k) e^{-t \operatorname{Im} \omega(k)} e^{-i(kz - t \operatorname{Re} \omega(k))} dk. \quad (4.28)$$

Poiché il problema linearizzato dipende parametricamente dal numero di Reynolds, anche la frequenza $\omega(k; R)$ è funzione di tale parametro. Si dimostra che, nel limite $R \rightarrow 0$, $\operatorname{Im} \omega(k; R) > 0$ per ogni k e quindi il moto laminare è stabile, mentre al crescere del numero di Reynolds si raggiunge una soglia critica

$$R_{cr} = \min\{R : \exists k \text{ tale che } \operatorname{Im} \omega(k; R) \leq 0\},$$

oltre la quale il moto laminare è instabile. Un ruolo importante è giocato anche dal valore

$$k_{cr} = \min\{k : \operatorname{Im} \omega(k; R_{cr}) \leq 0\};$$

infatti, in corrispondenza della soglia R_{cr} , il modo normale della perturbazione relativo a k_{cr} è l'unico a non essere smorzato nel tempo, ed è caratterizzato da $\operatorname{Im} \omega(k_{cr}; R_{cr}) = 0$.

Nel caso di perturbazioni indipendenti da ϑ per il moto di Couette, si trova però un'informazione ulteriore: $\operatorname{Re} \omega(k_{cr}; R_{cr}) = 0$. Questo significa che, quando viene raggiunta la soglia critica, la forma della perturbazione (4.28) dopo un breve transiente risulta

$$\mathbf{w}(r, z; R_{cr}) = \hat{\mathbf{w}}(r, k_{cr}) \operatorname{Re} e^{-ik_{cr}z} = \hat{\mathbf{w}}(r, k_{cr}) \cos k_{cr}z, \quad (4.29)$$

ed il moto che si osserva è ancora un moto stazionario, sovrapposizione di \mathbf{w} ed $U_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta}$.

Tale moto risulta essere periodico in z di periodo $2\pi/k_{cr}$ ed, in ogni periodo, le sue linee di corrente descrivono due vortici gemelli che ruotano in versi opposti. La colonna di fluido si stratifica quindi in bande di spessore π/k_{cr} in cui un vortice ruota attorno all'asse dei cilindri: sono i *vortici di Taylor*⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾Geoffrey Ingram TAYLOR (St. John's wood, 7 marzo 1886 – Cambridge, 27 giugno 1975) iniziò la propria

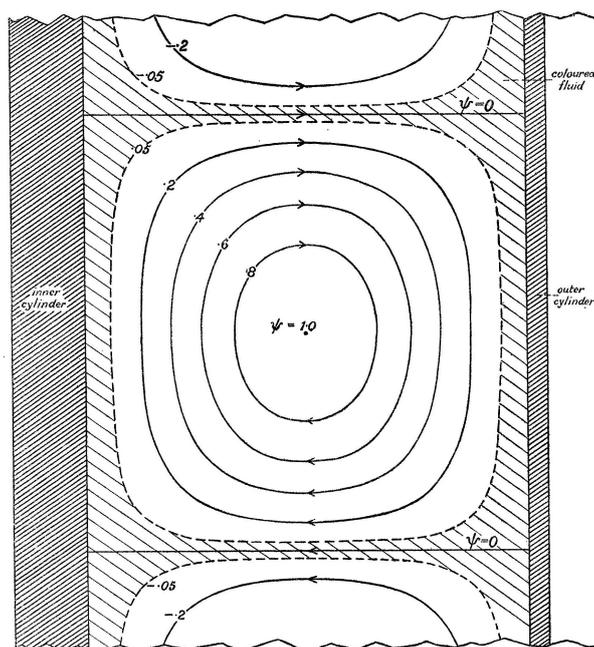


Figura 4.1: Linee di corrente di un vortice. Tavola dall'articolo originale di Taylor.

4.2 Turbolenza

Nella prima parte di questo capitolo, abbiamo più volte osservato che i moti laminari risultano instabili per numeri di Reynolds sufficientemente alti. Vi sono anche esempi di regimi in cui una nuova soluzione stazionaria diventa stabile ed osservabile quando il moto laminare non lo è più (ad esempio i vortici di Taylor). Tuttavia al crescere di R il moto del fluido diventa inesorabilmente caotico, caratterizzato da grandi fluttuazioni del campo di velocità, ma soprattutto della vorticità, su piccoli intervalli spazio-temporali: si instaura il *regime turbolento*.

Sottolineiamo che la turbolenza non è una proprietà del fluido, ma del flusso, cioè del tipo di moto, in quanto il parametro che la caratterizza è il numero di Reynolds, che, come sappiamo, combina la viscosità cinematica (caratterizzante il fluido) con una lunghezza ed una velocità che dipendono dalla geometria del moto; è quindi possibile progettare moti con un dato numero di Reynolds per qualunque fluido newtoniano.

Un'analisi troppo dettagliata di un moto turbolento, come la ricerca di una soluzione esplicita delle equazioni di Navier-Stokes in tale regime, sarebbe un'impresa tanto sovrumana quanto inutile. Infatti risulta molto più interessante cercare di descrivere delle proprietà globali del moto, delle quantità medie che possano rendere conto, talvolta anche solo qualitativamente, dei fenomeni osservati.

attività di ricerca con la meccanica quantistica, ma presto si volse allo studio della turbolenza, applicandola soprattutto alla meteorologia ed all'oceanografia. Nel 1923 pubblicò, su *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, un fondamentale articolo sulla stabilità dei moti rotatori. Durante la seconda guerra mondiale fu impegnato nello studio della propagazione di onde d'urto e, per le sue competenze in materia, fu chiamato a partecipare al *progetto Manhattan*.

L'obiettivo delle prossime sezioni è, quindi, quello di presentare i tratti salienti della turbolenza in generale e di qualche moto particolare, mediante considerazioni di tipo qualitativo o statistico e modelli naturalmente semplificati.

4.2.1 Dimensioni caratteristiche nei moti turbolenti

Se osserviamo attentamente un moto laminare che evolve (nel tempo o nello spazio) perdendo stabilità fino a raggiungere un regime turbolento, possiamo subito notare che le varie fasi della transizione alla turbolenza sono caratterizzate da scale di lunghezza diverse, identificabili nelle dimensioni dei vortici che via via dominano la scena. A queste sono anche associati tempi caratteristici e fluttuazioni del campo di velocità rilevanti per lo studio qualitativo del moto. Analizzeremo ora in dettaglio quali sono le scale spazio-temporali caratteristiche relative a diverse fasi o livelli del moto turbolento.

Anzitutto ci chiediamo quali siano le *scale di produzione* della turbolenza. Cerchiamo di capirlo con un esempio: quando un flusso investe un ostacolo cilindrico di diametro ℓ_0 , al di là dell'ostacolo osserviamo un moto vorticoso e turbolento, dove i vortici più grandi hanno un diametro paragonabile ad ℓ_0 ; inoltre, se v_0 è la velocità del flusso che investe l'ostacolo, le fluttuazioni del campo di velocità nella zona vorticoso sono dell'ordine di v_0 .

Da questo capiamo come le stesse grandezze caratteristiche che definiscono il numero di Reynolds del moto che precede la turbolenza, possano essere usate per definire una scala temporale ed un numero di Reynolds

$$\tau_0 = \frac{\ell_0}{v_0}, \quad R_0 = \frac{\ell_0 v_0}{\nu},$$

che caratterizzino la fase di produzione della turbolenza.

Mediante un'analisi dimensionale è possibile definire la scala temporale $\tau_d = \ell_0^2/\nu$, su cui la viscosità agisce dissipando l'energia cinetica del fluido. Ora valutiamo il rapporto tra il tempo caratteristico della fase produttiva ed il tempo di rilassamento dissipativo

$$\frac{\tau_d}{\tau_0} = \frac{\ell_0^2 v_0}{\nu \ell_0} = R_0,$$

e, poiché R_0 è associato alla produzione di turbolenza, possiamo assumere $R_0 \gg 1$. Questo ci dice che nella fase di produzione della turbolenza gli effetti dissipativi sono trascurabili: siamo all'inizio della *fase inerziale* del moto turbolento.

Man mano che la turbolenza si sviluppa, sempre durante la fase inerziale, si ha un meccanismo che trasferisce l'energia cinetica disponibile dai vortici inizialmente prodotti a vortici sempre più piccoli; questa *cascata di energia* si arresta, come vedremo, quando gli effetti dissipativi diventano importanti.

Spieghiamo meglio il meccanismo in oggetto. I vortici circolari possono essere visti come modi normali di oscillazione, possiamo allora considerare la componente lungo \mathbf{e}_x dell'equazione di Navier-Stokes per un modo normale di numero d'onda $k_0 = 2\pi/\ell_0$ (che rappresenta un vortice nella fase di produzione):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sin k_0 x) + (\sin k_0 x) \frac{\partial}{\partial x}(\sin k_0 x) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin k_0 x).$$

Mentre i termini lineari restano proporzionali a $\sin k_0 x$, il termine non lineare diventa

$$(\sin k_0 x) \frac{\partial}{\partial x}(\sin k_0 x) = k_0 (\sin k_0 x)(\cos k_0 x) = \frac{k_0}{2} \sin 2k_0 x,$$

cioè un termine che influisce sull'evoluzione di un modo normale con numero d'onda $2k_0$, associato a vortici di diametro $\ell_0/2$. Quindi il termine di trasporto trasferisce parte dell'energia di un vortice a vortici di dimensioni minori. Finché ci troviamo nella fase inerziale questo trasferimento di energia deve essere indipendente dalla viscosità.

La frazione di energia cinetica per unità di massa e per unità di tempo viene definita a partire dalle scale caratteristiche sopra introdotte come

$$\epsilon \propto \frac{v_0^2}{\tau_0} = \frac{v_0^3}{\ell_0}.$$

Se ora consideriamo vortici di lunghezza caratteristica $\ell \ll \ell_0$ e tempo di rivoluzione $\tau_\ell = \ell/v_\ell$, ma ancora nella fase inerziale ($R_\ell \gg 1$), possiamo ragionevolmente assumere che la frazione di energia trasferita a vortici più piccoli sia ancora

$$\epsilon \propto \frac{v_\ell^2}{\tau_\ell} = \frac{v_\ell^3}{\ell},$$

con la stessa costante di proporzionalità; da questa ipotesi possiamo allora ricavare la velocità caratteristica relativa alla lunghezza ℓ

$$v_\ell = v_0 \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ed il numero di Reynolds associato

$$R_\ell = \frac{v_\ell \ell}{\nu} = v_0 \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\ell}{\nu} = R_0 \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Adesso entra in gioco un'ipotesi fondamentale: supponiamo che la turbolenza sia omogenea ed isotropa. Data la fisionomia caotica dei moti turbolenti non è difficile accettare questa ipotesi, o, almeno, riconoscere che le situazioni in cui vale sono molto frequenti e di interesse applicativo. Dal punto di vista matematico significa che, una volta effettuata la decomposizione in modi normali nelle tre direzioni spaziali, l'energia $E(\mathbf{k})$ del modo associato al vettore d'onda \mathbf{k} dipende solo dal suo modulo k , e non dalla sua direzione.

Con questo possiamo passare alle coordinate sferiche nello spazio dei vettori d'onda e trovare che l'energia cinetica totale del fluido risulta

$$K = \int_0^{+\infty} kE(k)dk.$$

Considerando la lunghezza $\ell = 2\pi/k$, l'analisi dimensionale ci dice che

$$kE(k) \propto v_\ell^2 = v_0^2 \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\frac{2}{3}} \propto (\epsilon \ell)^{\frac{2}{3}},$$

ossia

$$K = C \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (4.30)$$

dove la costante $C \approx 1.5$ è stata determinata sperimentalmente. La relazione (4.30) definisce lo spettro di energia di Kolmogorov⁽¹⁰⁾ per i moti turbolenti ed è chiaramente valida nel settore inerziale dei numeri d'onda.

Considerando ora il rapporto tra il tempo di rilassamento dissipativo ed il tempo di rivoluzione di un vortice di diametro ℓ si ha

$$\frac{\tau_d}{\tau_\ell} \propto \frac{\ell^2 v_\ell}{\nu \ell} = \frac{\ell^2 (\epsilon \ell)^{\frac{1}{3}}}{\nu \ell} = \frac{\epsilon^{\frac{1}{3}} \ell^{\frac{4}{3}}}{\nu};$$

poiché tale quantità, nel limite $\ell \rightarrow 0$, tende a zero, mediante la cascata di energia si giunge necessariamente ad un punto in cui gli effetti dissipativi non sono più trascurabili. Per questo motivo definiamo la *lunghezza di dissipazione di Kolmogorov* come quella lunghezza ℓ_K per cui $\tau_d/\tau_\ell \approx 1$, ossia

$$\ell_K = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\nu^3 \ell_0}{v_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 R_0^{-\frac{3}{4}}.$$

Strutture di dimensione $\ell \ll \ell_K$ sono distrutte dalla dissipazione viscosa, mentre il moto è determinato da vortici di dimensione almeno uguali a ℓ_K , che costituiscono gli effettivi gradi di libertà del sistema turbolento. Il numero di tali vortici che possono essere contenuti in un volume dell'ordine di ℓ_0^3 è dato da $(\ell_0/\ell_K)^3 = R_0^{9/4}$, che rappresenta la stima di Landau⁽¹¹⁾ per il numero di gradi di libertà nel regime turbolento.

4.2.2 Equazione mediata di Reynolds

Anche se il modo in cui vi si giunge dipende sensibilmente dal tipo di situazione osservata, l'esito finale di ogni moto fluido al crescere di R è la turbolenza. In una tale situazione è necessario fare alcune ipotesi ulteriori e affidarsi in parte a concetti statistico-probabilistici.

Poiché però, per quanto irregolari, i moti turbolenti sono delle soluzioni \mathbf{v} del sistema di equazioni di Navier-Stokes, tale sarà anche, sotto ragionevoli ipotesi di convergenza che non enunciamo estesamente, la loro *media temporale*

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) d\tau.$$

Questo moto potrebbe essere, in linea di principio, tanto caotico quanto il moto di partenza \mathbf{v} . Eppure, in molte situazioni esso è più semplice, e per questo si fa l'ipotesi che esso non dipenda dall'istante t dal quale si comincia a prendere la media. In altre parole, il moto medio è supposto stazionario.

Introduciamo ora la *fluttuazione* \mathbf{w} definita da

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{U}. \quad (4.31)$$

⁽¹⁰⁾ Andrej Nikolaevič KOLMOGOROV (Tambov, 25 aprile 1903 – Mosca, 20 ottobre 1987) sviluppò i fondamenti della moderna teoria della probabilità e, nell'ambito della fisica matematica, studiò principalmente i fenomeni caotici. Gli si attribuisce la frase: “Ogni matematico crede di essere ben al di sopra di tutti gli altri. Il motivo per cui non lo dicono in pubblico è che sono persone intelligenti”.

⁽¹¹⁾ Lev Davidovič LANDAU (Baku, 22 gennaio 1908 – Mosca, 1 aprile 1968) diede importantissimi contributi alla fisica teorica del novecento, compiendo ricerche in svariati campi. Premio Nobel per la Fisica nel 1962, nello stesso anno fu coinvolto in un grave incidente stradale, dopo il quale dovette praticamente rinunciare all'attività scientifica.

Non bisogna confondere la (4.1), che definiva la perturbazione, con la (4.31): nella prima, infatti, le soluzioni \mathbf{v} e \mathbf{u} avevano in comune solo le condizioni al contorno, mentre qui la \mathbf{U} è, per così dire, generata dalla \mathbf{v} . Questo fatto ha una semplice conseguenza. Se introduciamo il *valore medio* di una generica quantità (scalare o vettoriale) f con la formula

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

si ha che $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{U}$. Quindi troviamo che, essendo \mathbf{U} stazionario,

$$\bar{\mathbf{w}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) dt = \mathbf{U} - \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

cioè che la fluttuazione ha media temporale nulla.

Il nostro scopo è ora di trovare una relazione che permetta di dire qualcosa sul moto medio \mathbf{U} . Poiché \mathbf{v} è una soluzione, si ha $\text{div } \mathbf{v} = 0$ e dunque anche $\text{div } \mathbf{U} = 0$. Quindi si dovrà avere $\text{div } \mathbf{w} = 0$. Vediamo ora cosa accade se si prende la media temporale dell'equazione di Navier-Stokes, scritta per \mathbf{v} , per un fluido newtoniano incompressibile:

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} + \overline{(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{b}} + \frac{1}{\rho_0} \overline{\text{div } \mathbb{T}[\mathbf{v}]}, \quad (4.32)$$

dove $\mathbb{T}[\mathbf{v}]$ è il tensore degli sforzi di Cauchy per il moto viscoso \mathbf{v} . Supponendo che le derivazioni, sia spaziali che temporali, commutino con la media temporale, avremo intanto

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \overline{(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}} = \text{div}(\overline{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}).$$

Ora abbiamo

$$\overline{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}} + \overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{U}} + \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}} = \overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}} + \overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{U}} + \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}$$

e ci si rende conto subito da un calcolo in componenti che

$$\overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{w}} = \mathbf{U} \otimes \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{0}, \quad \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{U}} = \bar{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

cosicché

$$\overline{(\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}} = \text{div}(\overline{\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}} + \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}).$$

Infine abbiamo

$$\overline{\mathbb{T}[\mathbf{v}]} = \mathbb{T}[\bar{\mathbf{v}}] = \mathbb{T}[\mathbf{U}]$$

per cui la (4.32) diventa

$$(\text{grad } \mathbf{U})\mathbf{U} = \bar{\mathbf{b}} + \frac{1}{\rho_0} \text{div}(\mathbb{T}[\mathbf{U}] - \rho_0 \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}) \quad (4.33)$$

ovvero, se esplicitiamo \mathbb{T} ,

$$(\text{grad } \mathbf{U})\mathbf{U} = \bar{\mathbf{b}} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \bar{p} + \nu \Delta \mathbf{U} - \text{div } \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}},$$

dove \bar{p} è la media temporale del campo di pressione. Il termine $\mathbf{S} = -\rho_0 \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}$ si dice *tensore degli sforzi di Reynolds* e contribuisce a modificare il tensore di Cauchy.

L'equazione (4.33) è nota come *equazione della quantità di moto di Reynolds*. Essa mostra che le fluttuazioni \mathbf{w} contribuiscono al bilancio della quantità di moto nel moto base, interagendo con esso. Naturalmente le fluttuazioni non sono note, per cui l'equazione (4.33) contiene di fatto più incognite dell'equazione originale per \mathbf{v} , ma in essa si vede che potrebbe essere possibile *modellizzare* i contributi provenienti dallo sforzo di Reynolds in termini del moto base \mathbf{U} , chiudendo così il problema, almeno per il moto medio. Per certi versi, è un po' come se nel fluido circolasse un altro fluido, la fluttuazione, che scambia quantità di moto con il moto base. Si può inoltre vedere che la parte turbolenta del moto ha caratteristiche dissipative, ossia che sottrae energia cinetica al moto base. Ciò ha da sempre motivato gli studi sull'insorgere della turbolenza, in quanto per questo motivo la portata netta di un moto turbolento risulta inferiore a quella di un moto laminare.

4.2.3 Viscosità cinematica turbolenta

Tenendo conto del tensore degli sforzi di Reynolds $\mathbf{S} = -\rho_0 \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}$, il tensore degli sforzi di Cauchy \mathbf{T} per la legge costitutiva di Cauchy-Poisson per i fluidi newtoniani diventa

$$\mathbf{T} = -\bar{p}\mathbf{l} + 2\mu\bar{\mathbf{D}} + \mathbf{S},$$

dove $\bar{\mathbf{D}}$ è il tensore velocità di deformazione medio associato al moto medio, ossia la parte simmetrica del gradiente della velocità media. L'ipotesi più semplice è quella di assumere che \mathbf{S} dipenda in modo affine da $\bar{\mathbf{D}}$, ovvero

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{D}}) = \mathbb{M}\bar{\mathbf{D}} + c\mathbf{l},$$

dove \mathbb{M} è un tensore del quarto ordine e c è un coefficiente legato all'energia cinetica turbolenta.

Poiché \mathbf{S} e $\bar{\mathbf{D}}$ sono simmetrici, e dunque sono individuati da 6 elementi, il tensore \mathbb{M} è individuato da 36 elementi. Inoltre, nel caso di fluidi incomprimibili si ha $\text{tr } \bar{\mathbf{D}} = 0$ che riduce a 5 le componenti libere di $\bar{\mathbf{D}}$, quindi \mathbb{M} è descritto da 30 parametri.

Una riduzione drastica è rappresentata dall'*ipotesi di Boussinesq*⁽¹²⁾, che suppone l'isotropia del tensore \mathbb{M} . In questo caso, siccome $\text{tr } \bar{\mathbf{D}} = 0$, \mathbb{M} diventa semplicemente uno scalare, ovvero esiste un parametro $\nu_t > 0$, detto *viscosità cinematica turbolenta*, tale che

$$\mathbf{S} = 2\rho_0\nu_t\bar{\mathbf{D}} + c\mathbf{l}.$$

Tale parametro verrà assunto positivo, per tener conto dell'effetto dissipativo della turbolenza. Inoltre, poiché ν_t dipende dal moto e non dal fluido, non può essere considerato costante, ma funzione della posizione (ed eventualmente del tempo). Comunque, in questo caso si può esprimere il coefficiente c facendo la traccia di \mathbf{S} :

$$3c = \text{tr } \mathbf{S} = -\rho_0 \overline{|\mathbf{w}|^2} = -2\bar{k},$$

dove con \bar{k} si è denotata la densità di energia cinetica della fluttuazione. Quindi si ha

$$\mathbf{S} = 2\rho_0\nu_t\bar{\mathbf{D}} - \frac{2}{3}\bar{k}\mathbf{l}$$

⁽¹²⁾ Joseph Valentin BOUSSINESQ (Saint-André-de-Sangonis, 13 marzo 1842 – Parigi, 19 febbraio 1929) diede importanti contributi allo studio matematico della fluidodinamica. La sua principale attività fu però la didattica universitaria, prima a Lille e poi a Parigi, per la quale scrisse numerose opere.

e il tensore di Cauchy diventa

$$\mathbf{T} = -\left(\bar{p} + \frac{2}{3}\bar{k}\right)\mathbf{1} + 2\mu\bar{\mathbf{D}} + 2\rho_0\nu_t\bar{\mathbf{D}},$$

da cui si ottiene l'equazione del moto

$$(\text{grad } \mathbf{U})\mathbf{U} = \bar{\mathbf{b}} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} \left(\bar{p} + \frac{2}{3}\bar{k}\right) + (\nu + \nu_t)\Delta\mathbf{U} + 2\bar{\mathbf{D}} \text{grad } \nu_t. \quad (4.34)$$

In questo caso l'effetto della turbolenza può essere interpretato da un punto di vista quantitativo come dato da un termine aggiuntivo per la pressione ($2\bar{k}/3$, la *pressione turbolenta*) e un termine aggiuntivo di tipo viscosità, descritto da ν_t , che in generale non è spazialmente costante; anzi, nelle teorie di strato limite il valore di ν_t è molto alto vicino alle pareti (ma non vicinissimo!), e decade piuttosto in fretta allontanandosi da esse. Il valore di ν_t , che comunque dipende da \mathbf{U} e quindi dalla particolare situazione di moto in cui ci si trova, può essere imposto a priori da situazioni sperimentali oppure, raffinando il modello, dedotto da altre equazioni differenziali in cui viene accoppiato ad altri fenomeni. È chiaro che la situazione è molto varia e dipende dalla specificità di ogni problema.

4.2.4 Equazioni filtrate e *Large Eddy Simulations*

Nelle precedenti sezioni abbiamo visto un'analisi delle equazioni di Navier-Stokes effettuata attraverso una media temporale. Introduciamo ora un diverso modo di selezionare informazioni statisticamente rilevanti, che ci permettano di analizzare il moto senza risolvere le equazioni di Navier-Stokes.

L'idea è quella di definire un nuovo campo, detto *velocità filtrata*, il cui valore in un punto è ottenuto come media del campo di velocità reale in un opportuno intorno. Sia l'intorno in questione, sia il peso con cui la velocità in ogni punto dell'intorno contribuisce alla media, sono determinati da una funzione $G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ detta *filtro*.

Dal punto di vista matematico esso è un nucleo di convoluzione normalizzato, cioè

$$\int G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1,$$

e la velocità filtrata \mathbf{v}^f risulta

$$\mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) = \int G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (4.35)$$

ossia la convoluzione tra la velocità reale \mathbf{v} ed il filtro.

Il pedice Δ indica la dimensione tipica del supporto del filtro. Un filtro è detto *omogeneo* se non dipende da \mathbf{x} , ed *isotropo* se dipende solo dal modulo di \mathbf{y} e non dalla sua direzione. Notiamo che la derivata temporale commuta sempre con l'operazione di filtraggio, mentre le derivate spaziali commutano con essa solo in presenza di un filtro omogeneo; inoltre, diversamente da quanto accade per la media temporale, l'operazione di filtraggio non lascia invariate quantità già filtrate, cioè $[\mathbf{v}^f]^f \neq \mathbf{v}^f$, se non in casi molto particolari.

Dal punto di vista analitico, le equazioni che si ottengono filtrando il sistema di Navier-Stokes non sono particolarmente suggestive, mentre su questa procedura si basa un'importante classe di metodi numerici detti *Large Eddy Simulations*.

L'idea alla base di questa tecnica è quella di costruire un filtro che, visto nello spazio dei momenti attraverso la sua trasformata di Fourier, corrisponde a fare una media in cui contano soltanto alcuni modi normali. L'obiettivo di tale restrizione è quello di diminuire sensibilmente il numero di gradi di libertà (davvero molto alto nella stima di Landau) necessari per dare una descrizione approssimata ma utile del moto turbolento.

La scelta di quali modi normali selezionare è guidata dalla teoria di Kolmogorov: si considerano solo i modi più energetici, cioè quelli con k piccoli, nella parte iniziale del settore inerziale dello spettro. Chiaramente a k piccoli corrispondono vortici di grandi dimensioni (*large eddies*) nello spazio reale, la cui dinamica coglie le caratteristiche fondamentali del moto turbolento.

4.3 Complementi ed esercizi

Esercizio 4.1. Trovare la legge di dispersione per le velocità di fase dei modi normali di perturbazione per il profilo di velocità stazionario

$$U(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 < y < y_0 \\ y & \text{se } -1 < y < 1 \\ -1 & \text{se } -y_0 < y < -1 \end{cases} \quad (4.36)$$

considerando prima il caso $y_0 = +\infty$ e poi $1 < y_0 < +\infty$.

Svolgimento. Abbiamo tre regioni cui sono associate le soluzioni dell'equazione di Rayleigh

$$\hat{\psi}^{(j)} = A_-^{(j)} e^{-ky} + A_+^{(j)} e^{ky} \quad j = 0, 1, 2.$$

Nel caso $y_0 = +\infty$ si ha subito $A_-^{(0)} = A_+^{(2)} = 0$. Il sistema (4.22)–(4.23) diventa

$$\begin{aligned} A_-^{(1)} e^{-k} + A_+^{(1)} e^k - (1-c)(-kA_-^{(1)} e^{-k} + kA_+^{(1)} e^k) &= -(1-c)(-kA_-^{(2)} e^{-k}) \\ A_-^{(1)} e^k + A_+^{(1)} e^{-k} - (-1-c)(-kA_-^{(1)} e^k + kA_+^{(1)} e^{-k}) &= -(-1-c)(kA_+^{(0)} e^{-k}) \\ A_-^{(1)} e^{-k} + A_+^{(1)} e^k &= A_-^{(2)} e^{-k} \\ A_-^{(1)} e^k + A_+^{(1)} e^{-k} &= A_+^{(0)} e^{-k} \end{aligned}$$

Ricavando $A_+^{(0)}$ e $A_-^{(2)}$ dalle ultime due equazioni e sostituendo nelle prime due si ha

$$\begin{aligned} A_-^{(1)} + (1 - 2k(1-c))A_+^{(1)} e^{2k} &= 0 \\ (1 - 2k(1+c))A_-^{(1)} e^{2k} + A_+^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

Si hanno soluzioni non banali se

$$1 - ((1 - 2k)^2 - 4k^2 c^2) e^{4k} = 0,$$

e questo dà la legge di dispersione

$$c^2 = \frac{(1 - 2k)^2 - e^{-4k}}{4k^2}.$$

Poiché c^2 assume valori sia positivi che negativi al variare di k , esistono sicuramente dei modi instabili, per k minore di una costante positiva.

Nel caso $1 < y_0 < +\infty$ i calcoli sono più lunghi, ma analoghi, e la legge di dispersione risulta

$$c = \frac{(k^2 - k - 1)e^{4k} - k^2 - k + 1 \pm \sqrt{e^{8k} + (4k^2 - 2)e^{4k} + 1}}{(k^2 - 1)(e^{4k} - 1)}$$

da cui si deduce che $\text{Im } c = 0$ per ogni k (indipendentemente dalla posizione $\pm y_0$ del bordo!), visto che l'espressione sotto radice è sempre positiva. Quindi il profilo considerato risulta stabile. \diamond

Esercizio 4.2. Trovare la legge di dispersione per le velocità di fase dei modi normali di perturbazione per il profilo di velocità stazionario

$$U(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y > 1 \\ 1 & \text{se } -1 < y < 1 \\ 0 & \text{se } y < -1 \end{cases} \quad (4.37)$$

che rappresenta il getto piano di un fluido perfetto che entra in una vasca dove il fluido è a riposo.

Svolgimento. Analogo all'esercizio precedente. La legge di dispersione risulta

$$c_{1,2} = \frac{1}{2}(e^{-2k} + 1 \pm e^{-2k} \sqrt{1 - e^{4k}})$$

$$c_{3,4} = \frac{1}{2}(e^{-2k} - 1 \pm e^{-2k} \sqrt{1 - e^{4k}})$$

da cui si deduce che le velocità di fase ammissibili hanno tutte parte immaginaria non nulla per k sufficientemente grande. Quindi il profilo considerato è instabile. \diamond

Esercizio 4.3. Si consideri il moto turbolento in un cumulonembo di diametro ℓ_0 di circa 300 m. Supponendo che la velocità nei vortici sia circa 3 m/s, la viscosità $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ e la densità $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$, calcolare il numero di Reynolds caratteristico R_0 , dare una stima del tasso ϵ di energia dissipata per unità di massa dai vortici nella nuvola e la potenza totale dissipata nella nuvola senza tener conto della viscosità, e dedurre il valore della lunghezza di Kolmogorov ℓ_K .

Svolgimento. Si ha immediatamente che

$$R_0 = \frac{v_0 \ell_0}{\nu} = \frac{3 \cdot 300}{15 \cdot 10^{-6}} = 0.6 \cdot 10^8,$$

e anche

$$\epsilon \approx \frac{v_0^3}{\ell_0} = \frac{27 \text{ m}^2}{300 \text{ s}^3} = 0.09 \text{ W/kg}.$$

La potenza dissipata dai modi inerziali nella nuvola risulta quindi

$$P = \epsilon \rho \ell_0^3 = 0.09 \cdot 1.25 \cdot 27000000 \text{ W} = 3.0375 \cdot 10^6 \text{ W};$$

e la lunghezza di Kolmogorov è

$$\ell_K = \ell_0 R_0^{-\frac{3}{4}} = 300 \cdot (0.6 \cdot 10^8)^{-\frac{3}{4}} \text{ m} \approx 4.4 \cdot 10^{-4} \text{ m},$$

cioè circa mezzo millimetro, che è molto più grande delle dimensioni molecolari. \diamond

Capitolo 5

Strato limite

Nelle vicinanze di un ostacolo (o di una parete) il moto di un fluido perfetto risulta tangente ad esso, a causa della condizione di impenetrabilità. In generale ci aspettiamo che il moto di un fluido viscoso incomprimibile tenda a quello di un fluido perfetto incomprimibile nel limite $\nu \rightarrow 0$, ma ciò non può mai accadere vicino ad un bordo, dato che dobbiamo imporre la condizione di aderenza. Di conseguenza, nel limite a basse viscosità, possiamo approssimare un fluido viscoso con un fluido perfetto lontano dai bordi fissi, mentre abbiamo bisogno di equazioni adatte a descrivere il moto del fluido in una regione vicina alla parete, detta *strato limite*, il cui spessore può variare a seconda dei parametri del problema in oggetto.

5.1 Equazioni di Prandtl per lo strato limite laminare

Consideriamo anzitutto un moto stazionario laminare bidimensionale e cerchiamo di determinare le equazioni necessarie. Localmente fissiamo un sistema di coordinate ortogonali (x, y) in cui e_x sia la direzione tangente alla parete (che non supponiamo necessariamente piatta) e e_y quella normale. Il sistema di equazioni per il fluido viscoso incomprimibile in un intorno del bordo risulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

e dipende parametricamente dalla viscosità cinematica ν .

Da quanto detto sopra sappiamo che anche nel limite $\nu \rightarrow 0$ non possiamo ottenere le equazioni di Eulero, pena la perdita della condizione di aderenza. D'altra parte, per y sufficientemente grande ci si avvicina al moto di un fluido perfetto; quindi la velocità tangenziale $u(x, y)$ varia molto lungo e_y vicino alla parete. Il modo più immediato per mantenere effetti della viscosità nel limite $\nu \rightarrow 0$ è di supporre che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \propto \nu^{-1} \tag{5.1}$$

vicino al bordo.

Vogliamo ora esplicitare questa proporzionalità; per farlo introduciamo un riscaldamento η della y che ci permetta di affiancare alle condizioni di aderenza $u = v = 0$, per $y = 0$, la condizione di avvicinamento al moto di fluido perfetto, esprimendola nel limite $\eta \rightarrow +\infty$.

La relazione (5.1) risulta esplicitamente se poniamo $\eta = ay/\sqrt{\nu}$, dove a , che per ora supponiamo uguale a 1, è una costante dimensionata in modo che η sia ancora una lunghezza. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

e con tale cambio di variabili il sistema di equazioni sopra scritto diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} v \frac{\partial v}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho_0 \sqrt{\nu}} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

che modifichiamo ulteriormente, introducendo la velocità normale riscalata

$$\hat{v}(x, \eta) = \frac{av(x, y)}{\sqrt{\nu}}$$

allo scopo di ottenere un campo di velocità (u, \hat{v}) a divergenza nulla. Infatti ora l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} = 0, \quad (5.2)$$

mentre le equazioni del moto risultano

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ \nu \left(u \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \nu^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

in cui possiamo finalmente passare al limite per $\nu \rightarrow 0$, ottenendo

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (5.4)$$

con le condizioni $u(x, 0) = \hat{v}(x, 0) = 0$ e

$$\forall x > 0 : \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} u(x, \eta) = U(x), \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \hat{v}(x, \eta) < +\infty, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} p(x, \eta) = p_0(x),$$

dove $U(x)e_x$ e $p_0(x)$ sono il campo di velocità e di pressione di un fluido perfetto. Da queste e dalla (5.4) discende immediatamente che $p(x, \eta) = p_0(x)$ per ogni η ; inoltre, dal Teorema di Bernoulli, $p_0 + \rho_0 U^2/2$ è costante, quindi

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dx} = U \frac{dU}{dx}.$$

Se ora ritorniamo alle variabili originali, le equazioni (5.2)–(5.3) diventano le *equazioni di Prandtl*⁽¹⁾ per lo strato limite:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.6)$$

Torniamo per un attimo sul valore della costante a che entra nella definizione di η : se ci sono una lunghezza caratteristica del problema L ed una velocità caratteristica V con cui definire il numero di Reynolds $R = UL/\nu$, è ragionevole scegliere $a = \sqrt{UL}$, in modo che $\eta = y\sqrt{R}$.

Considerando infine la forma adimensionale delle equazioni (5.2)–(5.3), che coincide con quella per le (5.5)–(5.6), notiamo che non dipende dalla viscosità, ovvero dal numero di Reynolds. Questo implica che, al variare del numero di Reynolds, il moto nello strato limite si modifica soltanto per similarità: velocità e distanze tangenziali restano invariate, mentre velocità e distanze in direzione normale scalano come $1/\sqrt{R}$.

Il fatto che le velocità adimensionali $u' = u/V$ e $\hat{v}' = \hat{v}/V$ siano di ordine 1 in R , implica anche che $v \approx V/\sqrt{R}$; così pure lo spessore in $\eta' = \eta/L$ dello strato limite, dovendo essere dell'ordine di 1, dà l'andamento dello spessore δ nella coordinata y come $\delta \approx L/\sqrt{R}$. Questo valore è molto importante, perché ci dice a quale distanza dal bordo possiamo, in prima approssimazione, trascurare gli effetti dell'aderenza dovuta alla viscosità.

5.1.1 Teoria di Blasius

Consideriamo il problema di un fluido incomprimibile in assenza di forze esterne in moto con velocità costante $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = U\mathbf{e}_1$ che investe un ostacolo fermo a forma di lamina nella direzione del moto (la parte positiva dell'asse x , tanto per fissare le idee). Chiaramente, se il fluido fosse perfetto l'ostacolo sarebbe invisibile e lo stato cinetico non cambierebbe. Se invece il fluido è viscoso, le condizioni al contorno impongono che $\mathbf{v}(x, 0, z, t) = \mathbf{0}$ per ogni x, z, t , quindi l'ostacolo modifica il flusso a valle.

Impostiamo il problema nel modo seguente: innanzitutto cerchiamo soluzioni stazionarie e piane, quindi \mathbf{v} dipende solo da x e y . Poi, per simmetria, studiamo solo il caso $y \geq 0$. In tale geometria le equazioni di Prandtl si possono ricondurre ad un'equazione differenziale ordinaria.

Per fare ciò, dobbiamo trovare un diffeomorfismo del dominio in se stesso che lasci inalterato il problema differenziale. Se una tale trasformazione esiste ed ammette un sistema di curve etichettate da un parametro, che vengono mappate in loro stesse, allora le soluzioni del problema sono costanti lungo tali curve. Di conseguenza possiamo definire un sistema di coordinate che, in ogni punto del piano, ha un asse tangente alle curve di livello lungo cui la soluzione non varia, e l'altro asse tangente ad un nuovo sistema di curve, che sono in ogni punto ortogonali a quelle sopra introdotte. Riusciamo così a ridurre un problema bidimensionale ad un problema monodimensionale, dove la variabile rilevante è quella che si muove lungo le linee ortogonali alle curve di livello della soluzione.

⁽¹⁾Ludwig PRANDTL (Freising, 4 febbraio 1875 – Göttingen, 15 agosto 1953) a partire dal suo primo lavoro come ingegnere in una fabbrica tedesca, si occupò di fluidodinamica, studiandone in particolare le applicazioni all'aerodinamica. Contribuì in modo decisivo alla prima teoria dei flussi supersonici e delle onde d'urto, tuttora largamente impiegata. A lui è intitolato un cratere che si trova sulla faccia nascosta della Luna.

Dato che il dominio del nostro problema è il primo quadrante, non può essere invariante per traslazioni o rotazioni. Proviamo allora con un riscaldamento di x ed y come

$$\tilde{x} = ax, \quad \tilde{y} = by$$

con $a, b > 0$, che a priori sono indipendenti. Le condizioni al contorno restano inalterate, mentre le equazioni diventano

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + b \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} = 0 \\ au \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + bv \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} = \nu b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2} \end{cases}$$

e se poniamo $a = b^2$ e $\tilde{v} = bv$ riotteniamo il sistema di partenza.

In particolare, fissato un punto (x, y) si ha $u(b^2x, by) = u(x, y)$ per ogni $b > 0$. Quindi u è costante sulla linea passante per (x, y) di equazione cartesiana

$$\frac{Y^2}{y^2} = \frac{X}{x}, \quad \text{ossia} \quad Y = \frac{y}{\sqrt{x}} \sqrt{X}.$$

Il sistema di curve di livello è quindi etichettato dai valori del parametro $k = \frac{y}{\sqrt{x}}$ al variare di (x, y) nel primo quadrante. Perciò possiamo ricondurci ad un problema monodimensionale cercando una soluzione che dipenda solo da k :

$$u(x, y) = g\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right).$$

Vogliamo poi anche adimensionalizzare la funzione g . Per fare questo, visto che il problema presenta una velocità di riferimento U , introduciamo il parametro adimensionale

$$s \stackrel{\text{def}}{=} y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

e cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(x, y) = U f'(s)$$

dove con f' indichiamo la derivata rispetto a s (introduciamo direttamente f' al posto di f solo per avere una forma più semplice dell'equazione differenziale finale). Dalle condizioni al contorno per u segue subito che

$$f'(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f'(s) = 1.$$

Inoltre, osservando che

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = -\frac{s}{2x}, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \sqrt{\frac{U}{\nu x}},$$

derivando per composizione si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U f''(s) \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{U}{2x} s f''(s), \quad (5.7)$$

e dall'equazione di continuità segue

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U}{2x} s f''(s).$$

Dunque si ha, sempre derivando per composizione,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} s f''(s),$$

e integrando per parti risulta

$$v(s) = \int \frac{\partial v}{\partial s} ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(s f'(s) - f(s) \right), \quad (5.8)$$

dove, tenendo conto della condizione al contorno su v , si è imposto $f(0) = 0$. Per riscrivere l'equazione del moto dobbiamo ancora calcolare

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(s), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x} f'''(s). \quad (5.9)$$

Combinando le (5.7), (5.8) e (5.9), l'equazione di Prandtl diventa

$$-\frac{U^2}{2x} s f' f'' + \frac{U^2}{2x} (s f' - f) f'' = \frac{U^2}{x} f'''.$$

Semplificando e riordinando si perviene all'equazione di Blasius

$$f'''(s) + \frac{1}{2} f(s) f''(s) = 0 \quad (5.10)$$

con le condizioni

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f'(s) = 1. \quad (5.11)$$

La (5.10) è un'equazione differenziale ordinaria del terzo ordine autonoma e non lineare. Il problema (5.11)-(5.11) non è un problema di Cauchy, ma si può comunque dimostrare che esiste un'unica soluzione di classe C^∞ per $s \geq 0$. In particolare, f' è monotona crescente e converge esponenzialmente a 1.

Un'approssimazione numerica della soluzione mostra ad esempio che $f'(5) = 0.99$, dunque si ha che per $s > 5$ la velocità orizzontale u supera il 99% di U . Per convenzione, si pone lo spessore dello strato limite a questo livello e dunque, ricordando la definizione di s , lo spessore (verticale) δ dello strato limite è dato da

$$\delta(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu}{U}} \sqrt{x},$$

dove si è evidenziata la dipendenza di δ da x . Per $y > \delta(x)$, l'influenza delle condizioni al contorno può ragionevolmente essere trascurata.⁽²⁾

Si noti che, grazie alla Tabella 5.1, per la componente verticale della velocità vale

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(s f'(s) - f(s) \right) = 0.860394 \sqrt{\frac{\nu U}{x}}$$

e dunque in generale non è vero che la componente verticale della velocità si annulla per $y \rightarrow +\infty$, diversamente da quello che succede nel moto di un fluido perfetto. Resta comunque vero che v tende a zero se anche $x \rightarrow +\infty$.

⁽²⁾Naturalmente, ciò dipende dal grado di precisione che si vuole raggiungere; ma basta considerare ad esempio $s = 7$ per avere $u/U = 0.99992$.

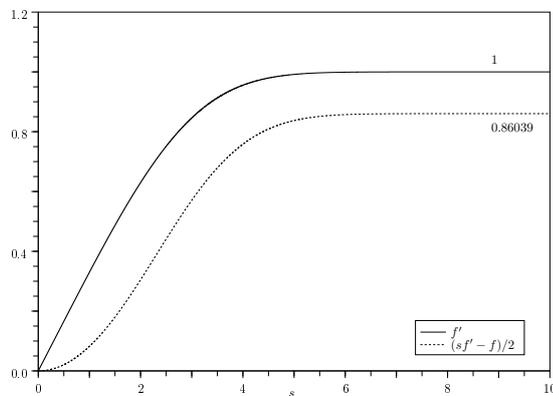


Figura 5.1: La soluzione dell'equazione di Blasius e la corrispondente velocità verticale.

s	f'	$\frac{1}{2}(sf' - f)$
0.0	0.000000	0.000000
0.5	0.165902	0.020729
1.0	0.329812	0.082120
1.5	0.486835	0.180057
2.0	0.629819	0.304807
2.5	0.751314	0.440987
3.0	0.846093	0.570735
3.5	0.913078	0.679037
4.0	0.955544	0.758214
4.5	0.979530	0.808874
5.0	0.991550	0.837238
5.5	0.996883	0.851141
6.0	0.998974	0.857112
6.5	0.999700	0.859362
7.0	0.999922	0.860107
7.5	0.999982	0.860323
8.0	0.999996	0.860378
8.5	0.999999	0.860391
9.0	1.000000	0.860393
9.5	1.000000	0.860394

Tabella 5.1: Tabella di valori della soluzione dell'equazione di Blasius

5.2 Strato limite turbolento

Vogliamo ora trovare dei risultati analoghi al profilo di Blasius per il campo di velocità medio U relativo ad un moto turbolento. Infatti, quando lo spessore δ dello strato limite laminare diventa sufficientemente grande, eventuali vortici non sono più smorzati dalla viscosità e può instaurarsi un regime turbolento. Considerando la geometria utilizzata nella sezione precedente, questo è possibile solo ad una certa distanza dall'origine della lamina piana.

Ci poniamo allora in tale situazione, dove possiamo approssimare il campo di velocità medio con un moto laminare $U(y)\mathbf{e}_x$ tutto diretto lungo \mathbf{e}_x , assumendo inoltre nullo il gradiente di pressione e che il tensore di Reynolds dipenda solo da y . Con queste ipotesi la prima componente dell'equazione mediata di Reynolds (4.33) diventa

$$0 = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}})_{xy}, \quad (5.12)$$

dove possiamo notare la competizione tra un termine di origine viscosa ed un termine di origine turbolenta.

In corrispondenza della lamina, le condizioni di aderenza impongono l'annullarsi di tutte le componenti del campo di velocità e gli effetti del tensore di Reynolds sono trascurabili nelle vicinanze del bordo. In tale contesto il moto è caratterizzato dal gradiente di deformazione medio, o meglio dall'attrito sul bordo

$$\tau^* = \nu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0},$$

che fornisce una prima grandezza caratteristica del problema. L'analisi dimensionale ci permette di definire la *velocità d'attrito* mediante $(v^*)^2 = \tau^*$ e la lunghezza caratteristica $y^* = \nu/v^*$, che determina lo spessore entro cui gli effetti della viscosità risultano dominanti.

Con queste possiamo definire le quantità adimensionali

$$y^+ = \frac{y}{y^*} \quad \text{e} \quad U^+ = \frac{U}{v^*}$$

che useremo per l'analisi dello strato limite turbolento.

Iniziamo determinando il profilo di velocità $U(y)$ nel cosiddetto *sostrato viscoso*: qui il tensore di Reynolds è trascurabile e l'equazione (5.12) si riduce a

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} = \text{costante} = \tau^*,$$

dove il valore della costante è dato dal valore per $y = 0$. Integrando e fissando $U(0) = 0$ si ottiene un profilo lineare

$$U(y) = \frac{(v^*)^2}{\nu} y, \quad \text{ossia} \quad U^+(y^+) = y^+,$$

che è valido da $y = y^+ = 0$ fino a $y \approx y^*$, $y^+ \approx 1$.

Aumentando la distanza dal bordo, gli effetti della turbolenza diventano via via più importanti, fino a risultare sperimentalmente dominanti a partire da $y^+ \approx 40$. In tale regione l'equazione (5.12) si riduce a $(\overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}})_{xy} = \text{costante}$, e il valore della costante può essere ragionevolmente fissato uguale a τ^* .

Vogliamo ora utilizzare l'ipotesi di Boussinesq per il tensore degli sforzi di Reynolds e quindi dobbiamo scegliere un'espressione per la viscosità cinematica turbolenta. Costruiamo allora una grandezza che abbia le giuste dimensioni fisiche, utilizzando la dimensione massima y dei vortici più energetici in uno strato di tale spessore e la velocità di attrito caratteristica del moto:

$$\nu_t(y) = \chi v^* y,$$

dove il numero adimensionale χ è detto *costante di von Kármán*⁽³⁾.

Con tali ipotesi l'equazione da integrare diventa

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{v^*}{\chi y},$$

da cui si ricava un profilo logaritmico

$$U(y) = \frac{v^*}{\chi} \log y + \tilde{C},$$

che, in forma adimensionale, dà il profilo universalmente applicabile

$$U^+(y^+) = \frac{1}{\chi} \log y^+ + C. \quad (5.13)$$

I valori $\chi \approx 0.41$ e $C \approx 5$ sono stati determinati sperimentalmente.

Sempre sperimentalmente si trova che il profilo lineare è valido per $y^+ < 3$, mentre quello logaritmico per $y^+ > 40$; nella zona intermedia, detta *zona di buffer* si ha una competizione dei contributi viscoso e turbolento e non si ha un'espressione analitica soddisfacente per il profilo di velocità.

La legge logaritmica (5.13) non è estrapolabile neppure per y^+ molto grande, infatti vogliamo che al di fuori dello strato limite la velocità sia $U_\infty \mathbf{e}_x$ con U_∞ costante.

Cerchiamo ora di imporre tale valore sulla soglia superiore dello strato limite, per ottenere un profilo di velocità continuo. Per facilitare l'operazione, prendiamo come lunghezza caratteristica lo spessore δ dello strato limite e supponiamo

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{v^*}{\delta} f(\bar{y}),$$

dove f è una funzione della variabile adimensionale $\bar{y} = y/\delta$. Poiché tale espressione per il gradiente di deformazione deve connettersi a quella già determinata per $y < \delta$, si ha $f(\bar{y}) = 1/\chi\bar{y}$. Quindi dobbiamo integrare

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{y}} = \frac{v^*}{\chi \bar{y}},$$

ottenendo

$$U(\bar{y}) = U_\infty + \frac{v^*}{\chi} \log \bar{y},$$

in modo che $U = U_\infty$ per $\bar{y} = 1$.

⁽³⁾Theodore VON KÁRMÁN (Budapest, 11 maggio 1881 – Aachen, 6 maggio 1963) diede molti fondamentali contributi in aerodinamica, ma si distinse anche per la grande capacità organizzativa e, sia in europa che negli Stati Uniti (dove si trasferì dal 1930 a motivo delle proprie origini giudaiche) diede inizio a numerose associazioni scientifiche, centri di ricerca e imprese tuttora attive. Durante la prima guerra mondiale, arruolato nell'esercito austro-ungarico, progettò un semplice elicottero; mentre durante e dopo la seconda guerra mondiale collaborò con l'esercito americano relativamente allo sviluppo di nuove tecnologie aeronautiche.

5.3 Complementi ed esercizi

Esercizio 5.1 (Primo problema di Stokes). Determinare il moto di un fluido newtoniano incomprimibile, in assenza di forze esterne, che si trova nel semispazio $z > 0$, nel caso in cui la parete che lo delimita sia ferma per $t < 0$ e si muova con velocità costante $U\mathbf{e}_1$ per $t \geq 0$, ovvero $\mathbf{v}_P(x, t) = h(t)U\mathbf{e}_1$ dove h è la funzione di Heaviside⁽⁴⁾. In questo caso la parete si è mossa impulsivamente e la sua accelerazione è $\mathbf{a}_P(x, t) = \delta_0(t)U\mathbf{e}_1$, dove δ_0 è la delta di Dirac⁽⁵⁾ in 0. Supponiamo al solito che il moto sia laminare, in particolare $\mathbf{v}(x, y, z, t) = u(x, z, t)\mathbf{e}_1$ e $p = p(x, z, t)$. Si noti che in questo caso non si suppone la stazionarietà del moto; questo problema è infatti tra i più semplici esempi di soluzione esatta delle equazioni di Navier-Stokes nel caso non stazionario.

Svolgimento. L'equazione di continuità diventa subito $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, e dunque $u = u(z, t)$. Inoltre la proiezione lungo la terza componente dell'equazione del moto si riduce a $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, ovvero $p = p(x, t)$. Ma poiché è naturale richiedere che la pressione sia uniforme all'infinito, ovvero

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} p(x, z, t) = p_0,$$

l'indipendenza da z implica $p = p_0$ in tutto il fluido.

Quindi la prima componente dell'equazione di Navier-Stokes si riduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5.14)$$

analoga all'equazione del calore unidimensionale, con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} u(0, t) = h(t)U \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} u(z, t) = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Per la particolare simmetria di questo problema, analogamente a quanto fatto per la teoria di Blasius, si può dimostrare che la soluzione è della forma

$$u(z, t) = f\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right). \quad (5.16)$$

Infatti il problema (comprese le condizioni al contorno) non cambia se si effettua una trasformazione $z \rightarrow az$, $t \rightarrow a^2t$, $a > 0$.

⁽⁴⁾ Oliver HEAVISIDE (Londra, 18 maggio 1850 – Torquay, 3 febbraio 1925) matematico, fisico e ingegnere autodidatta, applicò i numeri complessi allo studio dei circuiti elettrici, sviluppò tecniche per la risoluzione di equazioni differenziali, riformulò le equazioni di Maxwell in termini di forze magnetiche, elettriche e di flussi, e formulò indipendentemente l'analisi vettoriale. Sebbene non sia stato in buoni rapporti col mondo scientifico del tempo per buona parte della sua vita, Heaviside influì molto sullo studio della matematica e della scienza degli anni a venire. A lui si deve la funzione gradino, la cui derivata è la famosa delta di Dirac. Le proprietà così peculiari di questi strumenti matematici suscitavano uno scalpore tale che Heaviside fu espulso dalla Royal Society per indegnità teorica. Dirac, appunto, mostrerà in seguito quanto pregevoli fossero invece quelle intuizioni.

⁽⁵⁾ Paul Adrien Maurice DIRAC (Bristol, 8 agosto 1902 – Tallahassee, 20 ottobre 1984) nato in una famiglia di origini svizzere, è uno dei fondatori della meccanica quantistica, premio Nobel per la fisica nel 1933, fu lui a suggerire per primo l'esistenza dell'antimateria. Più di qualunque altro fisico contemporaneo, assegnò al concetto di *bellezza matematica* un ruolo preminente tra gli aspetti fondamentali della natura, fino al punto di sostenere che "una teoria includente una bellezza matematica ha più probabilità di essere giusta e corretta di una sgradevole che venga confermata dai dati sperimentali".

Cerchiamo ora la funzione f che risolve il problema, ponendo

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{t}}.$$

Poiché

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f' \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{z}{2t\sqrt{t}} f' = -\frac{\eta}{2t} f', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f'' \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + f' \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{t} f'',$$

l'equazione (5.14) diventa

$$f'' + \frac{\eta}{2\nu} f' = 0,$$

che è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti variabili da cui si ricava subito

$$f'(\eta) = C e^{-\frac{1}{2\nu} \int \eta d\eta} = C e^{-\frac{\eta^2}{4\nu}}.$$

Per trovare la f introduciamo la cosiddetta *error function*

$$\operatorname{erf}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

ottenendo

$$f(\eta) = C \sqrt{\nu\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu}}\right) + D,$$

e dunque

$$u(z, t) = C \sqrt{\nu\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) + D,$$

da considerare solo per $t > 0$ (nel caso $t < 0$ abbiamo per ipotesi che $u = 0$).

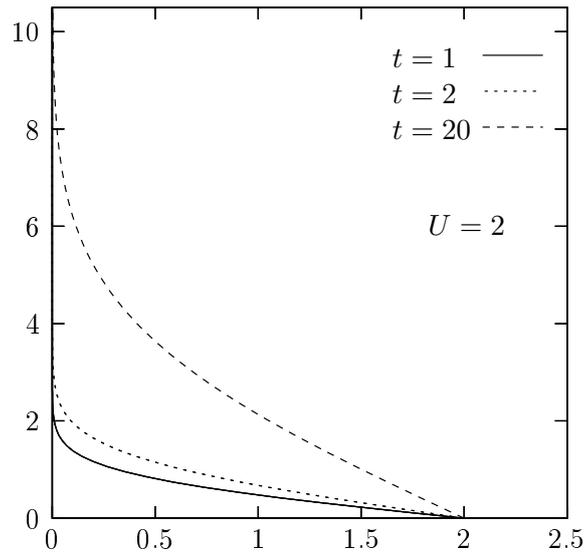


Figura 5.2: Profilo delle velocità nel primo problema di Stokes.

Imponendo le condizioni (5.15) si ha poi $D = U$ e, ricordando che $\operatorname{erf}(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow +\infty$, si ottiene $C = -U/\sqrt{\nu\pi}$, quindi

$$u(z, t) = \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right) U, \quad t > 0.$$

Notiamo che l'effetto delle condizioni di aderenza alla parete sulla velocità del fluido si annulla in modo più che esponenziale (come la funzione $1 - \operatorname{erf}(x)$, appunto). Poiché si può verificare, ad esempio, che $\operatorname{erf}(1.822) = 0.99$, ciò significa che alla distanza dalla parete

$$z_\delta = 2\sqrt{\nu t}1.822 = 3.644\sqrt{\nu t}$$

la velocità è un centesimo di quella della parete.

Per $z > z_\delta$ è ragionevole quindi considerare che il fluido resti fermo. Si ha uno strato limite dipendente dal tempo, il cui spessore z_δ è proporzionale a \sqrt{t} , fuori dal quale l'effetto delle condizioni al contorno può essere trascurato. \diamond

Appendice A

Elementi di calcolo tensoriale

In questo breve capitolo richiamiamo, senza pretesa di completezza, alcune formule di calcolo tensoriale che saranno utili nell'affrontare molte tematiche riguardanti la Dinamica dei Fluidi. L'ambientazione tipica sarà uno spazio euclideo di dimensione finita, che possiamo identificare con \mathbb{R}^n , dotato di una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Le applicazioni più frequenti si avranno poi per $n = 1, 2, 3$.

Adotteremo qui la *convenzione di somma di Einstein*⁽¹⁾ che consiste, se non diversamente specificato, nell'omettere il segno di sommatoria quando si hanno indici ripetuti. Tale sommatoria è sempre intesa tra 1 e n .

Ad esempio,

$$\begin{aligned} a_i b_i & \text{ sta per } \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbb{T}_{ij} a_j & \text{ sta per } \sum_{j=1}^n \mathbb{T}_{ij} a_j \quad (\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T} \mathbf{a}), \\ \mathcal{A}_{ijk} \mathbb{T}_{kj} & \text{ sta per } \sum_{j,k=1}^n \mathcal{A}_{ijk} \mathbb{T}_{kj} \quad (\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \mathbb{T}) \end{aligned}$$

ecc. Gli indici ripetuti si dicono *muti* o *saturati* (dummy indices). Visto che sono indici di sommatorie, le espressioni sopra scritte non dipendono da essi.

Nelle precedenti formule abbiamo anche introdotto una notazione che è standard nella Meccanica, ovvero quella di denotare in corsivo gli *scalari* (tensori di ordine 0), in grassetto minuscolo i *vettori* (tensori di ordine 1) e con il maiuscolo gli *endomorfismi* (tensori di ordine 2). Per tensori di ordine superiore non introdurremo una simbologia tipica.

Due tensori particolarmente interessanti nel calcolo tensoriale sono il simbolo δ di Kronecker⁽²⁾ e il tensore ε di Ricci-Curbastro⁽³⁾ quest'ultimo definito nel caso $n = 3$. Il primo è

⁽¹⁾ Albert EINSTEIN (Ulma, 14 marzo 1879 – Princeton, 18 aprile 1955) di cui non aggiungiamo altro.

⁽²⁾ Leopold KRONECKER (Liegnitz, 7 dicembre 1823 – Berlino, 29 dicembre 1891) matematico e logico, è famoso per la sua convinzione che l'analisi potesse essere interamente fondata sui numeri interi, convinzione che viene bene rappresentata dal suo noto aforisma: "Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo".

⁽³⁾ Gregorio RICCI-CURBASTRO (Lugo, 12 gennaio 1853 – Bologna, 6 agosto 1925) matematico, scrisse un fondamentale trattato sul calcolo differenziale assoluto con coordinate, ovvero sul calcolo tensoriale su una varietà riemanniana, che diventò il linguaggio di base della teoria della relatività generale di Einstein.

un tensore di ordine 2 definito da

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Esso gode della cosiddetta *proprietà di scambio*, ovvero elimina l'indice ripetuto e lo sostituisce con quello libero. Esempio:

$$\delta_{ij}v_j = v_i, \quad \delta_{ik}\mathbb{T}_{ik} = \mathbb{T}_{ii} = \mathbb{T}_{kk}, \quad \delta_{ik}\mathbb{T}_{ih} = \mathbb{T}_{kh}.$$

Il secondo è un tensore di ordine 3 (quindi una matrice cubica 3x3x3) di componenti

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (ijk) \text{ è una permutazione di ordine pari di } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ è una permutazione di ordine dispari di } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{se almeno un indice è ripetuto.} \end{cases}$$

Tali tensori sono legati dalla *identità* $\varepsilon - \delta$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}. \quad (\text{A.1})$$

Mediante δ è possibile riscrivere il *prodotto scalare* tra due vettori:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} a_i b_i = \delta_{ij} a_i b_j.$$

Allo stesso modo si può riscrivere *l'applicazione di un tensore a un vettore*:

$$(\mathbb{T}\mathbf{a})_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}_{ij} a_j = \delta_{jk} \mathbb{T}_{ij} a_k$$

e l'applicazione di un tensore di ordine 3 a un tensore di ordine 2:

$$(\mathcal{A}\mathbb{T})_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{ijk} \mathbb{T}_{kj} = \delta_{jm} \delta_{kl} \mathcal{A}_{ijk} \mathbb{T}_{lm}.$$

Nel caso $n = 3$, mediante ε si scrive in modo sintetico il *prodotto vettoriale*:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

A.1 Tensori di ordine 2

Indichiamo con $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei tensori di ordine 2 (applicazioni lineari da \mathbb{R}^n in se stesso). Essi vengono identificati con le matrici $n \times n$ date dalla loro rappresentazione nella base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Tale spazio può essere munito del prodotto scalare dato da

$$\mathbb{T} \cdot \mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}_{ij} \mathbb{S}_{ij}.$$

Si può vedere che la norma indotta da tale prodotto scalare è la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti (la cosiddetta *norma euclidea*). Denotiamo con I il *tensore identico*, ovvero il tensore tale che $I\mathbf{a} = \mathbf{a}$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ si può definire un elemento di $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ ponendo

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \quad (\text{A.2})$$

(*prodotto diadico*). In componenti, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$. In particolare, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$.

È facile vedere che $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{i,j=1,\dots,n}$ è una base ortonormale per $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\mathbb{T}_{ij} = \mathbb{T} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad \mathbb{T} = \mathbb{T}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Inoltre si ha $\|\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$.

Analogamente, si può definire il prodotto diadico di un tensore con un vettore, ponendo

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad (\mathbb{T} \otimes \mathbf{a})\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbb{T}, \quad (\text{A.3})$$

che in componenti dà $(\mathbb{T} \otimes \mathbf{a})_{ijk} = \mathbb{T}_{ij} a_k$. Si ha dunque $\mathbb{T} \otimes \mathbf{a} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n; \text{End}(\mathbb{R}^n))$ ed è un *tensore di ordine 3*. Naturalmente nessuno vieta di procedere in modo simile per tensori di ordine superiore, ma in questo corso sarà sufficiente fermarci a questo livello.

Si provi per esercizio che $\mathbb{T}\mathbf{a} = (\mathbb{T} \otimes \mathbf{a})\delta$.

Vediamo ora altre operazioni sui tensori:

- si definisce *prodotto* (o *composizione*) di \mathbb{T} e \mathbb{U} il tensore $\mathbb{T}\mathbb{U}$ dato da

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \quad (\mathbb{T}\mathbb{U})\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}(\mathbb{U}\mathbf{a}).$$

In componenti si ha $(\mathbb{T}\mathbb{U})_{ij} = \mathbb{T}_{ik} \mathbb{U}_{kj}$, ovvero l'usuale prodotto di matrici.

- Si dice *aggiunto* di un tensore \mathbb{T} il tensore \mathbb{T}' tale che

$$\mathbf{a} \cdot \mathbb{T}'\mathbf{b} = \mathbb{T}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

per ogni \mathbf{a}, \mathbf{b} . Si dimostra che tale tensore esiste ed è unico e in componenti (rispetto alla nostra base ortonormale) vale $\mathbb{T}'_{ij} = \mathbb{T}_{ji}$. In particolare si ha

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})' = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}.$$

- La *traccia* è la funzione lineare $\text{tr} : \text{End}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\text{tr}(\mathbb{T}) = \mathbb{T} \cdot \delta = \mathbb{T}_{ij} \delta_{ij}, \quad (\text{A.4})$$

ovvero $\text{tr}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}_{ii} = \mathbb{T} \cdot I$; in particolare $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Notiamo poi che la traccia corrisponde alla somma degli autovalori di una matrice, ovvero è il cosiddetto *invariante lineare*. Si può verificare inoltre che

$$\text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{U}) = \text{tr}(\mathbb{U}\mathbb{T}), \quad \text{tr}(\mathbb{T}') = \text{tr}(\mathbb{T}), \quad \mathbb{T} \cdot \mathbb{U} = \text{tr}(\mathbb{T}'\mathbb{U}) = \text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{U}').$$

Allo stesso modo si può definire un operatore di traccia sui tensori di ordine 3 ponendo

$$\text{tr}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \delta = \mathcal{A}_{ijk} \delta_{jk}, \quad (\text{A.5})$$

ovvero $(\text{tr}(\mathcal{A}))_i = \mathcal{A}_{ijj}$. In particolare,

$$\text{tr}(\mathbb{T} \otimes \mathbf{a}) = \mathbb{T}\mathbf{a}. \quad (\text{A.6})$$

Anche in questo caso, la traccia abbassa di due l'ordine tensoriale.

- La *parte simmetrica* e la *parte antisimmetrica* di un tensore \mathbb{T} sono date rispettivamente da

$$\mathbb{T}^s = \frac{1}{2}(\mathbb{T} + \mathbb{T}'), \quad \mathbb{T}^w = \frac{1}{2}(\mathbb{T} - \mathbb{T}').$$

È ovvio che $\mathbb{T}^s + \mathbb{T}^w = \mathbb{T}$. Se $\mathbb{T}^w = 0$, il tensore si dice *simmetrico*, se $\mathbb{T}^s = 0$ il tensore si dice *antisimmetrico*. L'insieme dei tensori simmetrici $\text{Sym}(\mathbb{R}^n)$, così come quello dei tensori antisimmetrici $\text{Skw}(\mathbb{R}^n)$, è sottospazio vettoriale di $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ e si ha

$$\text{End}(\mathbb{R}^n) = \text{Sym}(\mathbb{R}^n) \oplus \text{Skw}(\mathbb{R}^n).$$

La dimensione di $\text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ è $n(n+1)/2$, quella di $\text{Skw}(\mathbb{R}^n)$ è $n(n-1)/2$. Si può osservare che

$$\text{tr}(\mathbb{T}^s) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbb{T}) + \text{tr}(\mathbb{T}')) = \text{tr}(\mathbb{T}), \quad \text{dunque} \quad \text{tr}(\mathbb{T}^w) = 0.$$

In particolare, poiché $\varepsilon\mathbb{T}' = -\varepsilon\mathbb{T}$, si ha $\varepsilon\mathbb{T} = \varepsilon\mathbb{T}^w$ e $\varepsilon\mathbb{T}^s = 0$.

Inoltre, se $\mathbb{S} \in \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{W} \in \text{Skw}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\mathbb{S} \cdot \mathbb{W} = \text{tr}(\mathbb{S}'\mathbb{W}) = \text{tr}(\mathbb{S}\mathbb{W}) \quad \text{e anche} \quad \mathbb{S} \cdot \mathbb{W} = \text{tr}(\mathbb{S}\mathbb{W}') = -\text{tr}(\mathbb{S}\mathbb{W}),$$

dunque $\mathbb{S} \cdot \mathbb{W} = 0$ e la precedente decomposizione è ortogonale.

Nel caso $n = 3$ è ben noto che i tensori antisimmetrici sono legati al prodotto vettoriale, in questo senso: dato $\mathbb{W} \in \text{Skw}(\mathbb{R}^3)$, esiste $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 : \quad \mathbb{W}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Tale risultato si ottiene ponendo

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbb{W} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\mathbb{W}_{jk}\mathbf{e}_i. \quad (\text{A.7})$$

Infatti, ricordando l'identità $\varepsilon - \delta$ (A.1), verifichiamo che $(\varepsilon\mathbb{W}) \times \mathbf{a} = 2\mathbb{W}\mathbf{a}$:

$$((\varepsilon\mathbb{W}) \times \mathbf{a})_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jpk}\mathbb{W}_{qp}a_k = (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip})\mathbb{W}_{qp}a_k = (\mathbb{W}_{ik}a_k - \mathbb{W}_{ki}a_k) = 2(\mathbb{W}\mathbf{a})_i.$$

Viceversa, è immediato verificare che

$$\mathbb{W} = -\varepsilon\boldsymbol{\omega}, \quad \text{ovvero} \quad \mathbb{W}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k.$$

A.2 Analisi dei campi tensoriali

Un *campo tensoriale* è una funzione regolare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$, ovvero una funzione che associa ad ogni elemento di \mathbb{R}^n un tensore di ordine 2. Se invece il codominio è \mathbb{R}^n o \mathbb{R} , si parlerà rispettivamente di *campo vettoriale* o *campo scalare*.

A.2.1 Gradiente

Chiameremo *differenziale* di ψ in \mathbf{x} l'applicazione lineare $d\psi(\mathbf{x})$ tale che

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \quad \psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \psi(\mathbf{x}) + d\psi(\mathbf{x})\mathbf{h} + o(\mathbf{h}), \quad \text{dove} \quad \lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{|o(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Vediamone i tre casi:

- sia $\psi = f$ un campo scalare; allora $df(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n)$; il vettore che rappresenta tale applicazione lineare si denota con $\text{grad } f(\mathbf{x})$ e si chiama *gradiente* di f in \mathbf{x} . Quindi $\text{grad } f$ è un campo vettoriale e si ha

$$(\text{grad } f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

- Sia $\psi = \mathbf{u}$ un campo vettoriale; si ha $d\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ e si può identificare con un tensore di ordine 2, che indicheremo con $\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x})$ o anche con $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$. In componenti si ha

$$(\text{grad } \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

ovvero la matrice jacobiana di \mathbf{u} .

- Sia $\psi = \mathbb{T}$ un campo tensoriale. In questo caso $d\mathbb{T}(\mathbf{x})$ si può identificare con un *tensore di ordine 3* e si ha

$$(\text{grad } \mathbb{T})_{ijk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}.$$

In ogni caso, il gradiente aumenta di uno l'ordine tensoriale.

Ragionando in componenti si possono verificare le seguenti formule:

$$\text{grad}(fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f \quad (\text{A.8})$$

$$\text{grad}(f\mathbf{u}) = f \text{grad } \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \text{grad } f \quad (\text{A.9})$$

$$\text{grad}(f\mathbb{T}) = f \text{grad } \mathbb{T} + \mathbb{T} \otimes \text{grad } f \quad (\text{A.10})$$

$$\text{grad}(f \circ \mathbf{u}) = (\text{grad } \mathbf{u})' \text{grad } f \quad (\text{A.11})$$

$$\text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\text{grad } \mathbf{v})' \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})' \mathbf{v}. \quad (\text{A.12})$$

A titolo di esempio, vediamo la seconda:

$$\begin{aligned} (\text{grad}(f\mathbf{u}))_{ij} &= \frac{\partial (f\mathbf{u})_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \mathbf{u}_i + f \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \\ &= \mathbf{u}_i (\text{grad } f)_j + f (\text{grad } \mathbf{u})_{ij} = (\mathbf{u} \otimes \text{grad } f)_{ij} + (f \text{grad } \mathbf{u})_{ij}. \end{aligned}$$

A.2.2 Divergenza

Sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 . Definiamo la *divergenza* di \mathbf{u} come il campo scalare dato dalla traccia del gradiente di \mathbf{u} :

$$\text{div } \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(\text{grad } \mathbf{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Si ha che $\operatorname{div} \mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ricordando che l'operatore div è lineare (in quanto lo è la traccia) e prendendo la traccia della formula (A.9) si ottiene

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = f \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f. \quad (\text{A.13})$$

Se invece \mathbb{T} è un campo tensoriale di classe C^1 , definiamo la divergenza di \mathbb{T} come il campo vettoriale dato dalla traccia del gradiente di \mathbb{T} :

$$\operatorname{div} \mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbb{T}) = \frac{\partial \mathbb{T}_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.14})$$

Quindi il vettore $\operatorname{div} \mathbb{T}$ ha per componenti le divergenze dei vettori-riga che compongono \mathbb{T} . Valgono inoltre le seguenti formule:

$$\operatorname{div}(f\mathbb{T}) = f \operatorname{div} \mathbb{T} + \mathbb{T} \operatorname{grad} f \quad (\text{A.15})$$

$$\operatorname{div}(\mathbb{T}'\mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbb{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbb{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} \quad (\text{A.16})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})\mathbf{v}. \quad (\text{A.17})$$

La prima si dimostra prendendo la divergenza della (A.10) e ricordando la (A.6), mentre le altre possono essere verificate per componenti.

Inoltre, se \mathbf{u} è un campo vettoriale di classe C^2 (affinché valga il Lemma di Schwarz⁽⁴⁾), vale l'utile formula

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u})', \quad (\text{A.18})$$

la cui verifica in componenti è

$$(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = (\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u})')_i.$$

Citiamo infine un teorema importante del calcolo integrale.

Teorema della divergenza. Sia A un aperto regolare limitato di \mathbb{R}^n e siano f un campo scalare, \mathbf{u} un campo vettoriale e \mathbb{T} un campo tensoriale di classe C^1 su A . Allora, detta \mathbf{n} la normale esterna ad ∂A , si ha

$$\int_A \operatorname{grad} f \, dV = \int_{\partial A} f \mathbf{n} \, dS, \quad \int_A \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \int_{\partial A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \int_A \operatorname{div} \mathbb{T} \, dV = \int_{\partial A} \mathbb{T} \mathbf{n} \, dS.$$

La formula (A.16) e il Teorema della divergenza portano alla notissima *formula di Gauss-Green*:

$$\int_A \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbb{T} \, dV = \int_{\partial A} \mathbf{u} \cdot \mathbb{T} \mathbf{n} \, dS - \int_A \operatorname{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbb{T} \, dV. \quad (\text{A.19})$$

⁽⁴⁾ Karl Hermann Amandus SCHWARZ (Hermsdorf, 25 gennaio 1843 – Berlino, 30 novembre 1921) oltre ad essere un illustre matematico era capitano del corpo volontari dei vigili del fuoco ed aiutava regolarmente la capostazione nei suoi uffici.

A.2.3 Laplaciano

Sia ψ un campo scalare o vettoriale di classe C^2 . Definiamo il *laplaciano* di ψ come:

$$\Delta\psi \stackrel{\text{def}}{=} \text{div grad } \psi.$$

In componenti: se f è un campo scalare si ha

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2};$$

se \mathbf{u} è un campo vettoriale si ha

$$(\Delta\mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \Delta u_i$$

ovvero il laplaciano ha per componenti i laplaciani delle componenti. Tale affermazione però vale soltanto per le coordinate ortonormali da noi fissate: se il laplaciano è espresso in coordinate curvilinee, non è più vero che il laplaciano di un vettore è il laplaciano delle componenti. Anticipando i risultati della Sezione A.3, diamo l'espressione del laplaciano in coordinate cilindriche (r, ϑ, z) . Per un campo scalare

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

mentre per un campo vettoriale

$$\Delta\mathbf{u} = \left[\Delta u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right] \mathbf{e}_r + \left[\Delta u_\vartheta - \frac{1}{r^2} \left(u_\vartheta - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right) \right] \mathbf{e}_\vartheta + \Delta u_z \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.20})$$

A.2.4 Rotore

D'ora in poi fisseremo la nostra attenzione al caso $n = 3$.

Sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 . Il *rotore* o *rotazionale* di \mathbf{u} è il campo vettoriale

$$\text{rot } \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \text{ grad } \mathbf{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3.$$

È chiaro che il rotore è lineare in \mathbf{u} . Dalla (A.7) e ricordando che $\varepsilon \mathbf{T} = \varepsilon \mathbf{T}^w$, si ottiene

$$(\text{grad } \mathbf{u})^w \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{v}. \quad (\text{A.21})$$

Richiamiamo infine alcune utili formule:

$$\text{rot}(f\mathbf{u}) = f \text{rot } \mathbf{u} + (\text{grad } f) \times \mathbf{u} \quad (\text{A.22})$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \quad (\text{A.23})$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\text{grad } \mathbf{u})\mathbf{v} - (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u}, \quad (\text{A.24})$$

di cui verifichiamo la seconda:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} u_j v_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_k + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} u_j \\ &= \varepsilon_{kij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_k - \varepsilon_{jik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} u_j = (\operatorname{rot} \mathbf{u})_k v_k - (\operatorname{rot} \mathbf{v})_j u_j.\end{aligned}$$

Vediamo poi un altro teorema importante del calcolo integrale.

Teorema di Stokes. Sia S una superficie regolare in \mathbb{R}^3 di normale \mathbf{n} , con bordo ∂S regolare e sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 su S . Allora si ha

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

A.2.5 Altre proprietà del calcolo tensoriale tridimensionale

Vediamo ora alcune proprietà notevoli che riguardano l'analisi tensoriale nello spazio tridimensionale. Tutti i campi si supporranno di classe C^2 .

- Si ha

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}. \quad (\text{A.25})$$

Infatti, riscrivendo la (A.21) con $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ costante si ha

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{a} = (\operatorname{grad} \mathbf{u} - (\operatorname{grad} \mathbf{u})') \mathbf{a} \quad (\text{A.26})$$

e prendendo la divergenza di entrambi i membri si ha, applicando (A.23) a sinistra e (A.16) a destra,

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u}' - \operatorname{grad} \mathbf{u}).$$

Applicando poi (A.18) e la definizione di laplaciano, si ottiene la tesi.

In particolare, se $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ e $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$, allora si ha $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ovvero \mathbf{u} è *armonica*.

- Se nella precedente equazione (A.26) si sceglie $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ si ottiene

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = (\operatorname{grad} \mathbf{u} - (\operatorname{grad} \mathbf{u})') \mathbf{u};$$

osservando poi che ponendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ nella (A.12) si ha

$$\operatorname{grad} \mathbf{u}^2 = 2(\operatorname{grad} \mathbf{u})' \mathbf{u},$$

si ottiene la formula

$$(\operatorname{grad} \mathbf{u}) \mathbf{u} = (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{u}^2. \quad (\text{A.27})$$

- Si ha $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Infatti, usando le componenti e il Lemma di Schwarz,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

poiché scambiando gli indici muti i e j la derivata seconda non cambia mentre ε_{ijk} cambia di segno.

- Allo stesso modo, $\text{rot grad } f = \mathbf{0}$. Infatti,

$$(\text{rot grad } f)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

Una dimostrazione alternativa per questa formula, senza ricorrere alle componenti (ma appoggiandosi alla formula precedente) si può dare fissando un generico $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ e utilizzando la (A.23):

$$\mathbf{a} \cdot \text{rot grad } f = \text{div}(\text{grad } f \times \mathbf{a}) = \text{div rot}(f\mathbf{a}) = 0.$$

- *Teorema del potenziale scalare.* Sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$ su un aperto semplicemente connesso $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Allora esiste un campo scalare φ tale che $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ su A .
- *Teorema del potenziale vettore.* Sia \mathbf{u} un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\text{div } \mathbf{u} = 0$ su un aperto semplicemente connesso $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Allora esiste un campo vettoriale \mathbf{a} tale che $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{a}$ su A .

A.3 Operatori differenziali in coordinate polari

Vediamo un modo, a mio parere interessante, di trovare l'espressione di gradiente e divergenza in coordinate polari. Ci avvarremo del teorema della divergenza.

Supponiamo di voler calcolare $\text{grad } f$, dove f è un campo scalare, in coordinate polari: poiché si ha

$$\int_D \text{grad } f \, dV = \int_{\partial D} f \mathbf{n} \, dS, \quad (\text{A.28})$$

fissato un punto $(\hat{r}, \hat{\vartheta})$ scegliamo un dominio

$$D_\varepsilon = \{(r, \vartheta) : |r - \hat{r}| < \varepsilon, |\vartheta - \hat{\vartheta}| < \varepsilon\}.$$

Ora, la frontiera di D_ε è formata da quattro curve: due archi di circonferenza (di normale esterna $\pm \mathbf{e}_r$) e due segmenti (di normale esterna $\pm \mathbf{e}_\vartheta$). Riscrivendo la (A.28) in coordinate polari (e tenendo conto che per il dominio D_ε e gli archi di circonferenza abbiamo lo jacobiano r) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\vartheta}-\varepsilon}^{\hat{\vartheta}+\varepsilon} \int_{\hat{r}-\varepsilon}^{\hat{r}+\varepsilon} r \text{grad } f(r, \vartheta) \, dr \, d\vartheta &= \int_{\hat{\vartheta}-\varepsilon}^{\hat{\vartheta}+\varepsilon} \left[(\hat{r} + \varepsilon) f(\hat{r} + \varepsilon, \vartheta) - (\hat{r} - \varepsilon) f(\hat{r} - \varepsilon, \vartheta) \right] \mathbf{e}_r(\vartheta) \, d\vartheta \\ &+ \int_{\hat{r}-\varepsilon}^{\hat{r}+\varepsilon} \left[f(r, \hat{\vartheta} + \varepsilon) \mathbf{e}_\vartheta(\hat{\vartheta} + \varepsilon) - f(r, \hat{\vartheta} - \varepsilon) \mathbf{e}_\vartheta(\hat{\vartheta} - \varepsilon) \right] \, dr. \end{aligned}$$

Se ora applichiamo il teorema della media, ne risulta che esistono $(r_1, \vartheta_1), (r_2, \vartheta_2) \in \overline{D_\varepsilon}$ tali che

$$\begin{aligned} 4\varepsilon^2 r_1 \text{grad } f(r_1, \vartheta_1) &= 2\varepsilon \left[(\hat{r} + \varepsilon) f(\hat{r} + \varepsilon, \vartheta_2) - (\hat{r} - \varepsilon) f(\hat{r} - \varepsilon, \vartheta_2) \right] \mathbf{e}_r(\vartheta_2) \\ &+ 2\varepsilon \left[f(r_2, \hat{\vartheta} + \varepsilon) \mathbf{e}_\vartheta(\hat{\vartheta} + \varepsilon) - f(r_2, \hat{\vartheta} - \varepsilon) \mathbf{e}_\vartheta(\hat{\vartheta} - \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Dividendo tutto per $4\varepsilon^2$ e semplificando, per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$\hat{r} \operatorname{grad} f(\hat{r}, \hat{\vartheta}) = \frac{\partial}{\partial r}(rf) \Big|_{(\hat{r}, \hat{\vartheta})} \mathbf{e}_r(\hat{\vartheta}) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}(f\mathbf{e}_\vartheta) \Big|_{(\hat{r}, \hat{\vartheta})},$$

da cui, omettendo le variabili,

$$\operatorname{grad} f = \frac{f}{r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{f}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta}.$$

Considerando infine che $\frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\mathbf{e}_r$, i termini estremi del secondo membro si semplificano, dando l'espressione del *gradiente di un campo scalare in coordinate polari*:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta. \quad (\text{A.29})$$

Se ora consideriamo un campo vettoriale $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta$, partendo dal Teorema della Divergenza

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_{\partial D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

e applicando come in precedenza il Teorema della Media sul medesimo dominio D otteniamo

$$4\varepsilon^2 r_1 \operatorname{div} \mathbf{u}(r_1, \vartheta_1) = 2\varepsilon \left[(\hat{r} + \varepsilon) u_r(\hat{r} + \varepsilon, \vartheta_2) - (\hat{r} - \varepsilon) u_r(\hat{r} - \varepsilon, \vartheta_2) \right] \\ + 2\varepsilon \left[u_\vartheta(r_2, \hat{\vartheta} + \varepsilon) - u_\vartheta(r_2, \hat{\vartheta} - \varepsilon) \right],$$

da cui, dividendo e mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, viene l'espressione della *divergenza di un campo vettoriale in coordinate polari*:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}. \quad (\text{A.30})$$

Dalle (A.29) e (A.30) si può poi ricavare facilmente l'espressione del *laplaciano di un campo scalare in coordinate polari*:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}. \quad (\text{A.31})$$

Per calcolare il gradiente di un campo vettoriale \mathbf{u} è sufficiente partire dalla formula

$$\int_D \operatorname{grad} \mathbf{u} dV = \int_{\partial D} \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} dS,$$

da cui si ricava la formula, analoga alla (A.29)

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \vartheta} \otimes \mathbf{e}_\vartheta. \quad (\text{A.32})$$

Considerato che $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta$ dipendono solo da ϑ e che $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} = \mathbf{e}_\vartheta$ e $\frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\mathbf{e}_r$, si ottiene

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - u_\vartheta \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right) \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta.$$

Bibliografia

- [1] C. Banfi, *Introduzione alla meccanica dei continui*, CEDAM, Padova, 1990.
- [2] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Third edition*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] M. E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, Mathematics in Science and Engineering 158, Academic Press, New York-London, 1981.
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Fluid mechanics*, Pergamon Press, London, 1959.
- [5] P. Manneville, *Instabilities, Chaos and Turbulence*, Imperial College Press, London, 2004.
- [6] J. Serrin, Mathematical principles of classical fluid mechanics, in *Handbuch der Physik* 8/1, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1959), pag. 125–263.