Fasci ed equazioni differenziali lineari

Giovanni Morando

25 gennaio 2008

Principio

Siano P e Q due operatori differenziali lineari a coefficienti olomorfi su $\mathbb{C}^n$. Diciamo che P e Q sono equivalenti se, per ogni spazio funzionale $\mathcal{F}$ ove P e Q agiscono, le soluzioni di P e Q a valori in $\mathcal{F}$ sono isomorfe.

Sia z la coordinata olomorfa su $\mathbb{C}$, $\partial_z := \frac{d}{dz}$.
Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Si considerino gli operatori differenziali

$$P_\alpha := z\partial_z - \alpha \ ,$$

$$P_{\alpha+1} := z\partial_z - \alpha - 1 \ .$$

Sia $\mathcal{F}$ uno spazio funzionale sul quale tali operatori agiscono. Consideriamo le soluzioni di P_α e $P_{\alpha+1}$ a valori in $\mathcal{F}$.

Se $\alpha \neq -1$, si verifica facilmente che i seguenti morfismi sono biiettivi e uno inverso dell'altro,

$$\mathcal{S}ol(P_\alpha, \mathcal{F}) \underset{\frac{1}{\alpha+1}\partial_z}{\overset{z\cdot}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}ol(P_{\alpha+1}, \mathcal{F}) \ .$$

Ne segue che gli operatori P_α e $P_{\alpha+1}$ sono equivalenti se $\alpha \neq 1$.

1. Studieremo le soluzioni degli operatori del $z\partial_z - \alpha$ a valori nei $\mathbb{C}$-*spazi vettoriali* $\mathcal{F}(U)$, ove $\mathcal{F}$ é uno spazio funzionale e U un aperto.
2. Introdurremo le nozioni di *categoria, fascio e fascio localmente costante.* Le *soluzioni olomorfe* degli operatori $z\partial_z - \alpha$ sono fasci localmente costanti su $\mathbb{C}^\times$ e danno un'equivalenza di categorie. Definiremo gli *operatori differenziali regolari* ed enunceremo la corrispondenza di Riemann-Hilbert.
3. *Allargheremo la categoria dei fasci* per considerare altri spazi funzionali che non rientrano nella categoria dei fasci (come le distribuzioni temperate). Studieremo le soluzioni come oggetti di questa *categoria più ampia.*

Soluzioni come spazi vettoriali

Condideriamo gli operatori

$$z\partial_z - \alpha \qquad\qquad (\alpha \in \mathbb{C}) \ .$$

Le cui soluzioni le funzioni $c \cdot z^\alpha \quad (c \in \mathbb{C})$ (considerate per il momento solo simboli).

Studiamo le soluzioni degli operatori $z\partial_z - \alpha$ a valori negli spazi delle funzioni olomorfe $\mathcal{O}$, delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}$ e delle distribuzioni $\mathcal{D}b$ sugli aperti

1. U: un disco aperto centrato all'origine,
2. V: un disco aperto non contentente l'origine,
3. W: una corona circolare aperta di centro l'origine.

Si hanno i seguenti isomorfismi di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali.

$$\mathcal{S}ol(z\partial_z - \alpha, \mathcal{O}(V)) \simeq \mathbb{C} \cdot z^\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{S}ol(z\partial_z - \alpha, \mathcal{O}(W)) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} \cdot z^\alpha & \alpha \in \mathbb{Z} \\ 0 & \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \text{ (poiché } z^\alpha \notin \mathcal{O}(W)) \end{cases}$$

$$\mathcal{S}ol(z\partial_z - \alpha, \mathcal{O}(U)) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} \cdot z^\alpha & \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (poiché } z^\alpha \notin \mathcal{O}(U)) \end{cases}$$

Consideriamo ora l'operatore ∂_z le cui soluzioni sono le funzioni localmente costanti.

Si hanno i seguenti isomorfismi di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali.

$$\mathcal{S}ol(z\partial_z, \mathcal{O}(U)) \simeq \mathcal{S}ol(\partial_z, \mathcal{O}(U)) \simeq \mathbb{C}$$

$$\mathcal{S}ol(z\partial_z, \mathcal{D}b(U)) \simeq \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathbb{C} \cdot Heaviside$$

$$\mathcal{S}ol(\partial_z, \mathcal{D}b(U)) \simeq \mathbb{C} \cdot 1$$

Quindi, gli operatori ∂_z e $z\partial_z$ non sono equivalenti, ma parrebbe che le soluzioni olomorfe locali non siano sufficienti per affermarlo.

Sia ora $f \in \mathcal{O}(U)$.

L'equazione $z\partial_z u = f$ ha soluzioni se e solo se $f(0) = 0$.

L'equazione $\partial_z u = f$ ha sempre soluzioni.

Quindi, nonostante i nuclei dei morfismi di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali

$$\mathcal{O}(U) \xrightarrow{z\partial_z} \mathcal{O}(U)$$

$$\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\partial_z} \mathcal{O}(U)$$

siano isomorfi, i conuclei non lo sono.

È sufficiente quindi guardare le soluzioni olomorfe locali delle equazioni omogenee e non-omogenee, per asserire che gli operatori $z\partial_z$ e ∂_z non sono equivalenti.

Introduzione
Soluzioni come spazi vettoriali
Soluzioni come fasci localmente costanti
Fasci subanalitici ed equazioni irregolari

Consideriamo ora l'operatore

$$z^2\partial_z + 1 \ ,$$

che ha come soluzioni i multipli complessi di $\exp(\frac{1}{z})$.

Si hanno i seguenti isomorfismi di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}ol(z\partial_z + 1, \mathcal{M}(U)) &\simeq \mathbb{C} \cdot \frac{1}{z} \\ \mathcal{S}ol(z^2\partial_z + 1, \mathcal{M}(U)) &\simeq 0 \text{ (poiché } \exp(\frac{1}{z}) \notin \mathcal{M}(U)) \end{aligned}$$

I due operatori quindi non sono equivalenti, ma non è sufficiente usare le soluzioni olomorfe per verificarlo, sono necessarie le soluzioni meromorfe all'origine.

Risulta quindi che le soluzioni olomorfe locali sono sufficienti per distinguere le seguenti famiglie di operatori differenziali

$$\{z\partial_z - \alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},\ \{z\partial_z - \alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}_{<0}\},\ \{z\partial_z - \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\},$$

$$\{\partial_z\}\ .$$

Non sono invece sufficienti per distinguere tra gli operatori

$$z\partial_z + 1 \qquad \text{e} \qquad z^2\partial_z + 1\ ,$$

o tra gli operatori

$$z\partial_z + i \qquad \text{e} \qquad z\partial_z + 2i\ .$$

Soluzioni come fasci localmente costanti

Definizione

Una categoria C *consiste in un insieme* $Ob(\mathsf{C})$, *detto l'insieme degli oggetti di* C *e per ogni* $X, Y \in Ob(\mathsf{C})$, *un insieme di morfismi* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ *con una legge associativa di composizione che soddisfi gli assiomi intuitivi di composizione e identità.*

Esempi di categorie

1. Set: gli oggetti sono gli insiemi e i morfismi sono le applicazioni tra insiemi.
2. $\mathrm{Mod}(\mathbb{C})$: gli oggetti sono i $\mathbb{C}$-spazi vettoriali e i morfismi sono le applicazioni lineari.

Nella prima parte abbiamo considerato le soluzioni locali degli operatori in quanto oggetti di $\mathrm{Mod}(\mathbb{C})$.

Un'applicazione tra categorie si chiama funtore.

Definizione

Date due categorie C, C', *un funtore* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}'$ *è il dato di un'applicazione di insiemi*

$$F_o : Ob(\mathsf{C}) \longrightarrow Ob(\mathsf{C}')$$

e per ogni $X, Y \in Ob(\mathsf{C})$, *un'applicazione*

$$F_m : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}'}(F_o X, F_o Y)$$

che commuti con la legge di composizione.

Definizione

Due categorie si dicono equivalenti se c'è un funtore F *tra esse tale che* F_o *sia una biezione tra le classi di isomorfismo degli oggetti e tale che* F_m *sia una biezione tra i morfismi.*

Sia X uno spazio topologico.

Definizione

Un fascio in $\mathbb{C}$-spazi vettoriali su X consiste in

$$\begin{array}{rcll} \textit{Aperti di } X & \longrightarrow & Mod(\mathbb{C}) & \\ U & \longmapsto & F(U) & \\ (U \subset V) & \longmapsto & \big(F(V) \to F(U)\big) & (\textit{restrizione}) \end{array}$$

che soddisfi la seguente proprietà di incollamento.

Per ogni aperto U e ogni ricoprimento $U = \cup_{j \in J} U_j$, la seguente sequenza è esatta,

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & F(U) \longrightarrow & \prod_{j \in J} F(U_j) & \longrightarrow & \prod_{j,k \in J} F(U_j \cap U_k) \\ & s \longmapsto & \left\{ s|_{U_j} \right\}_j & & \\ & & \left\{ s_j \right\}_j & \longmapsto & \left\{ s_j|_{U_j \cap U_k} - s_k|_{U_j \cap U_k} \right\}_{j,k} . \end{array}$$

Esempi di fasci

Sono fasci: le funzioni continue, le funzioni olomorfe, $\mathcal{C}^\infty$, le distribuzioni.

Non sono fasci: le funzioni limitate, le funzioni L^2. Infatti l'incollamento di funzioni limitate (quadrato-integrabili) può non essere globalmente limitato (quadrato-integrabile).

L'applicazione

$$U \longmapsto \left\{ \text{funzioni localmente costanti a valori in } \mathbb{C}^n \right\} ,$$

definisce il fascio costante $\underline{\mathbb{C}}^n_X$, di fibra $\mathbb{C}^n$.

Definizione

Dati due fasci F e G, un morfismo di fasci

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

consiste in una famiglia

$$\varphi_U : F(U) \longrightarrow G(U) \qquad (U \text{ aperto di } X) \ ,$$

che commuti con le restrizioni.

Esempi di morfismi di fasci

Se X è una varietà analitica complessa ($\mathbb{C}^n$), si hanno i seguenti morfismi iniettivi di fasci su X,

$$\underline{\mathbb{C}}_X \rightarrowtail \mathcal{O}_X \rightarrowtail \mathcal{C}^\infty_X \rightarrowtail \mathcal{C}^0_X \ .$$

La più semplice generalizzazione dei fasci costanti, sono i fasci localmente costanti.

Definizione

Un fascio F su uno spazio topologico X si dice localmente costante se esiste un ricoprimento aperto $X = \cup_{j \in J} U_j$ tale che F ristretto a ognuno degli aperti U_j sia un fascio costante su U_j.

Esempi di fasci localmente costanti

Sia P un operatore differenziale su X (aperto di $\mathbb{C}$) a coefficienti olomorfi.

$$P = a_n(z)\partial_z^n + \ldots + a_1(z)\partial_z + a_0(z) \ .$$

La mappa $U \longmapsto \mathcal{S}ol(P, \mathcal{O}(U))$ definisce un fascio su X.
Il teorema di esistenza e unicità locali di Cauchy implica che tale fascio è localmente costante di fibra $\mathbb{C}^n$ sugli aperti che non contengono zeri di $a_n(z)$.

Enunciamo ora un risultato fondamentale che asserisce che la categoria dei fasci localmente costanti su X è interamente determinata dal gruppo fondamentale di X.

Teorema

Sia X uno spazio topologico non vuoto, connesso, localmente connesso per archi.
La categoria dei fasci loc. cost. su X a valori in $\mathrm{Mod}(\mathbb{C})$ e la categorie delle rappresentazione di $\pi_1(X)$ a valori in $\mathrm{Mod}(\mathbb{C})$, sono equivalenti.

Sia $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dare un fascio localmente costante su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ equivale a dare una rappresentazione di $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$. In particolare i fasci localmente costanti di fibra $\mathbb{C}$ sono equivalenti alle rappresentazioni di $\mathbb{Z}$ a valori in $\mathbb{C}$, di rango 1, che a loro volta si identificano banalmente con $\mathbb{C}^\times$.

Vediamo una realizzazione analitica di tale equivalenza di categorie.

Abbiamo già visto che le soluzioni olomorfe dell'operatore $z\partial_z - \alpha$ sono un fascio localmente costante su $\mathbb{C}^\times$.

Qual è la rappresentazione di $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$ corrispondente?

Prolungamento analitico!

La soluzione z^α definita in un intorno di $z_0 \neq 0$ può essere prolungata analiticamente attorno all'origine. Dopo un giro la funzione risulta essere moltiplicata per $e^{2\pi i\alpha} \in \mathbb{C}^\times$.

Ne segue che

$$\mathcal{S}ol(z\partial_z - \alpha, \mathcal{O}) \simeq \mathcal{S}ol(z\partial_z - \beta, \mathcal{O})$$

nella categoria dei fasci localmente costanti su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, se e solo se

$$\alpha - \beta \in \mathbb{Z}\ .$$

Sia $X \subset \mathbb{C}$ un intorno aperto dell'origine,

$$P = \sum_{j=0}^{n} a_j(z)\partial_z^j \ ,$$

con $a_j \in \mathcal{O}(X)$ e $a_n(z) \neq 0$ se $z \neq 0$.

Introduzione
Soluzioni come spazi vettoriali
Soluzioni come fasci localmente costanti
Fasci subanalitici ed equazioni irregolari
Categorie
Fasci localmente costanti
Operatori differenziali regolari

Proposizione

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. *Per ogni* $j \leq n$, $n - \mathrm{ord}_0(a_n) \geq j - \mathrm{ord}_0(a_j)$.
2. *L'equazione* $Pu = 0$ *ha* n *soluzioni linearmente indipendenti della forma* $u(z) = h(z)z^{\alpha}\log(z)^r$, *per* $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, h *olomorfa in* 0 *e* $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. *Siano* $\mathbb{C}\{z\}$ *(risp.* $\mathbb{C}[\![z]\!]$*) l'anello delle serie convergenti (risp. formali).*
   Il morfismo naturale $\mathbb{C}\{z\} \rightarrowtail \mathbb{C}[\![z]\!]$ *induce un isomorfismo tra i nuclei e i conuclei dei seguenti morfismi,*

$$\mathbb{C}\{z\} \xrightarrow{P} \mathbb{C}\{z\} \ ,$$

$$\mathbb{C}[\![z]\!] \xrightarrow{P} \mathbb{C}[\![z]\!] \ .$$

   i.e. le soluzioni formali convergono.

Definizione

Se P verifica una delle condizioni sopraelencate, si dice che P ha una singolarità regolare in 0.

Teorema

Siano P e Q operatori differenziali regolari. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. *P e Q sono equivalenti.*
2. *Esistono $\varphi, \psi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ tali che $Q \circ \varphi = \psi \circ P$ e φ (risp. ψ) induca un isomorfismo tra i nuclei (risp. i conuclei) dei morfismi*
$$\mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \ ,$$
$$\mathcal{O} \xrightarrow{Q} \mathcal{O} \ .$$

In particolare i fasci delle soluzioni olomorfe sono sufficienti per dire se due equazioni regolari sono equivalenti o meno.

Fasci subanalitici
ed equazioni irregolari

Definizione

Sie $U \subset \mathbb{C}$ un aperto subanalitico relativamente compatto, $f \in \mathcal{O}(U)$ si dice temperata se esistono $M, C > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq \frac{C}{\mathrm{dist}(z, \partial U)^M} \ .$$

Lemma

La funzione $\exp(1/z)$ è temperata su U se e solo se esiste $A > 0$ tale che U sia contenuto in $\mathbb{C} \setminus \overline{B\big((A,0),A\big)}$.

Introduzione
Soluzioni come spazi vettoriali
Soluzioni come fasci localmente costanti
Fasci subanalitici ed equazioni irregolari
Le funzioni olomorfe temperate
Gli operatori differenziali irregolari

Siano U e V aperti relativamente compatti subanalitici. La seguente sequenza è esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^t(U \cup V) \longrightarrow \mathcal{O}^t(U) \oplus \mathcal{O}^t(V) \longrightarrow \mathcal{O}^t(U \cap V) \longrightarrow 0 \ .$$

Si ricordi che la definizione di fascio chiedeva che la sequenza seguente fosse esatta

$$0 \longrightarrow \quad F(U) \longrightarrow \quad \prod_{j \in J} F(U_j) \quad \longrightarrow \quad \prod_{j,k \in J} F(U_j \cap U_k) \quad .$$

Ne segue che $\mathcal{O}^t$ è un fascio quando si considerano solo ricoprimenti finiti e aperti subanalitici.

i.e. $\mathcal{O}^t$ è un fascio subanalitico.

I fasci su una varietà analitica complessa sono naturalmente dei fasci subanalitici, in particolare la categoria dei fasci subanalitici è strettamente più grande di quella dei fasci.

Si ricordi che se P è un operatore regolare all'origine, le sue soluzioni olomorfe si possono scrivere come $h(z)z^\alpha \log(z)^r$, ove h è olomorfa in un intorno dell'origine, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

In particolare le soluzioni delle equazioni differenziali regolari sono sempre temperate.

Teorema

Sia P un operatore differenziale lineare ordinario. Su ogni settore di ampiezza sufficientemente piccola, le soluzioni olomorfe di P possono scriversi come combinazioni lineari di

$$h_j(z)\exp(\varphi_j) \qquad (j = 1, \ldots, n) \ ,$$

ove $h_j, h_j^{-1} \in \mathcal{O}^t$ e $\varphi_j \in z^{-1/l}\mathbb{C}[z^{-1/l}]$.

Le funzioni del tipo $\exp(\varphi)$, con $\varphi \in z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$, sono alla base della differenza tra equazioni regolari ed equazioni irregolari.

Consideriamo gli operatori $z^2\partial_z + 1$ e $z^3\partial_z + 2$ che hanno soluzioni rispettivamente $\exp(1/z)$ e $\exp(1/z^2)$.

Teorema

Esiste un aperto subanalitico U tale che $\exp(1/z) \in \mathcal{O}^t(U)$ *e* $\exp(1/z^2) \notin \mathcal{O}^t(U)$.

Corollario

Esiste un aperto subanalitico U tale che

$$\mathcal{S}ol(z^2\partial_z + 1, \mathcal{O}^t(U)) \simeq \mathbb{C} \cdot \exp(1/z) \ ,$$

$$\mathcal{S}ol(z^3\partial_z + 2, \mathcal{O}^t(U)) \simeq 0 \ .$$

In particolare, le soluzioni olomorfe temperate sono utili per dire se due operatori differenziali irregolari sono equivalenti o meno.

Fasci ed equazioni differenziali lineari

Giovanni Morando

25 gennaio 2008