ESAME SUPERFICI DI RIEMANN A.A. 2016/17 - PRIMO APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia f la funzione meromorfa $z \mapsto \frac{(z-1)^4}{(z-2)^3}$ su $\mathbb{P}^1$. Si determini $\operatorname{div}(f)$. Sia $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento associato a f. Si dimostri che φ ha tre punti di ramificazione.

Soluzione: La funzione f ha uno zero di ordine 4 in $z = 1$ e un polo di ordine 3 in $z = 2$. Per tutti gli altri $z \in \mathbb{C}$, il valore di $f(z)$ non è né 0 né ∞. Da $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$ segue adesso che f ha un polo di ordine 1 in $z = \infty$. Quindi $\operatorname{div}(f) = 4(1) - 3(2) - (\infty)$.

Il rivestimento φ ha grado 4. La formula di Riemann-Hurwitz applicata a questo caso dà

$$-2 = -2 \cdot 4 + \operatorname{ram}(f).$$

In particolare, $\operatorname{ram}(f) = 6$. Troviamo che $\operatorname{ram}_1(f) = 3$ e $\operatorname{ram}_2(f) = 2$. Cioè c'è un unico ulteriore punto P con $\operatorname{ram}_P(f) = 1$.

(2) Sia $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado 5 con cinque zeri distinti. Si consideri la superficie di Riemann ottenuta incollando le due curve $y^3 = f(z)$ e $u^3 = f(1/w)w^6$ tramite $w = 1/z, u = y/z^2$. Si consideri la funzione meromorfa $g : (y, z) \mapsto z$. Si estenda g ad un morfismo $\varphi : S \to \mathbb{P}^1$. Si determinino i poli e gli zeri di g, il grado di φ e i punti di ramificazione col rispettivo indice di ramificazione. Che genere ha S?

Soluzione: La funzione g ha uno zero (y_0, z_0) se e solo se $z_0 = 0$ e $y_0^3 = f(0)$. Se $f(0) \neq 0$ allora g ha tre zeri $(y_0, 0)$, altrimenti c'è un unico zero in $(0, 0)$ con molteplicità 3.

Ci sono poli solo nella seconda carta. In tal caso $w = 0$. Il polinomio $f(1/w)w^6$ è della forma $w\,h(w)$, con $h(w) \in \mathbb{C}[w]$. In particolare, g ha un unico polo in $(u, w) = (0, 0)$, che è di ordine 3.

Da questa discussione segue anche che c'è un unico punto di S che non è nella prima carta. Questo punto P è un punto di ramificazione di φ con $\operatorname{ram}_P(f) = 2$.

Per trovare gli altri punti di ramificazione, fissiamo adesso $z_0 \in \mathbb{C}$. Per $f(z_0) \neq 0$ troviamo tre punti nella preimmagine. Per $f(z_0) = 0$ troviamo un unico punto nella preimmagine. In particolare, troviamo 5 ulteriori punti Q_i con $\operatorname{ram}_{Q_i}(f) = 2$. Con Riemann-Hurwitz troviamo

$$2g(S) - 2 = -2 \cdot 3 + 12$$

In particolare, $g(S) = 4$.

(3) Sia $\mathbb{T}$ un toro complesso. In questo esercizio si può assumere il seguente risultato: Si ha $P + Q = R$ in $\mathbb{T}$ se e solo se $(P - O) + (Q - O) = (R - O)$ in $\operatorname{Pic}(\mathbb{T})$. Siano adesso $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{T}$. Mostrare che esiste una funzione meromorfa f con $\operatorname{div}(f) = p_1 + \cdots + p_n - q_1 - \cdots - q_n$ se e solo se $\sum p_i = \sum q_i$ in $\mathbb{T}$.

Soluzione: Ci sono vari modi per mostrare questo risultato. Una abbastanza concettuale è la seguente:

Date: 20 giugno 2017.

Sappiamo che $(\mathbb{T}, O)$ e $(\mathrm{Pic}^0(\mathbb{T}), 0)$ sono gruppi abeliani. Denotiamo con $+$ la legge di gruppo su $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{T})$ e con $\oplus$ la legge di gruppo su $\mathbb{T}$.

La mappa $\varphi : \mathbb{T} \to \mathrm{Pic}^0(\mathbb{T})$ definita da $\varphi(P) = P - O$ è un morfismo di gruppi: se $R = P \oplus Q$ abbiamo $(P - O) + (Q - O) = R - O$. Da questo segue

$$\varphi(P \oplus Q) = \varphi(R) = R - O = (P - O) + (Q - O) = \varphi(P) + \varphi(Q).$$

Il nucleo di φ è banale: se $\varphi(P) = 0$ abbiamo che $P - O = 0$ in $\mathrm{Pic}(\mathbb{T})$. Cioè c'è una funzione $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ con $\mathrm{div}(f) = P - O$. Da $g(\mathbb{T}) > 0$ segue $P = O$, cioè il nucleo di φ è $\{O\}$.

L'iniettività di φ ci dà che

$$p_1 \oplus p_2 \oplus p_n \ominus q_1 \ominus \cdots \ominus q_n = O$$

se e solo se

$$\varphi(p_1 \oplus p_2 \oplus p_n \ominus q_1 \ominus \cdots \ominus q_n) = 0$$

se e solo se

$$\sum (p_i - O) - \sum (q_i - O) = 0$$

Si noti che

$$\sum (p_i - O) - \sum (q_i - O) = \sum p_i - \sum q_i = 0.$$

L'ultima uguaglianza è equivalente all'esistenza di una funzione f t.c.

$$\sum p_i - \sum q_i = \mathrm{div}(f)$$