ESAME SUPERFICI DI RIEMANN A.A. 2016/17 - PRIMO APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia f la funzione meromorfa $z \mapsto \frac{(z-1)^4}{(z-2)^3}$ su $\mathbb{P}^1$. Si determini $\operatorname{div}(f)$. Sia $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento associato a f. Si dimostri che φ ha tre punti di ramificazione.

(2) Sia $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado 5 con cinque zeri distinti. Si consideri la superficie di Riemann ottenuta incollando le due curve $y^3 = f(z)$ e $u^3 = f(1/w)w^6$ tramite $w = 1/z, u = y/z^2$. Si consideri la funzione meromorfa $g : (y,z) \mapsto z$. Si estenda g ad un morfismo $\varphi : S \to \mathbb{P}^1$. Si determinino i poli e gli zeri di g, il grado di φ e i punti di ramificazione col rispettivo indice di ramificazione. Che genere ha S?

(3) Sia $\mathbb{T}$ un toro complesso. In questo esercizio si può assumere il seguente risultato: Si ha $P + Q = R$ in $\mathbb{T}$ se e solo se $(P - O) + (Q - O) = (R - O)$ in $\operatorname{Pic}(\mathbb{T})$. Siano adesso $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{T}$. Mostrare che esiste una funzione meromorfa f con $\operatorname{div}(f) = p_1 + \cdots + p_n - q_1 - \cdots - q_n$ se e solo se $\sum p_i = \sum q_i$ in $\mathbb{T}$.

Date: 20 Giugno 2017.