ESAME SUPERFICI DI RIEMANN - SECONDO APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia S una superficie con una struttura complessa, si dimostri che S è orientabile.

Soluzione: Vedi dispense.

(2) Sia $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ la funzione meromorfa $z \mapsto \frac{(z-6)^3}{(z-1)^4}$. Si determini $\operatorname{div}(f)$. Sia $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento associato a f. Si dimostri che φ ha tre punti di ramificazione.

Soluzione: Simile all'esercizio 1 del primo appello. Si trova che $\operatorname{div}(f) = 3(6) + (\infty) - 4(1)$.

(3) Sia S una superficie di Riemann compatta. La gonalità $\gamma(S)$ di S è il minimo di $\{\deg(f) \mid f : S \to \mathbb{P}^1\}$.

(a) Dimostrare che $\gamma(S)$ è uguale a $\min\{\deg(D) \mid D \in \operatorname{Div}(S) \mid \ell(D) \geq 2\}$.

Soluzione: Ogni morfismo $\varphi : S \to \mathbb{P}^1$ è della forma φ_V dove $V \subset L(D)$, D è un divisore tale che V è senza punti basi, $\ell(D) \geq 2$ e $\deg(D) = \deg(\varphi)$. In particolare,

$$\gamma(S) \geq \min\{\deg(D) \mid D \in \operatorname{Div}(S) \mid \ell(D) \geq 2\}.$$

Adesso prendiamo un D t.c. $\ell(D) \geq 2$ e

$$\deg(D) = \min\{\deg(D) \mid D \in \operatorname{Div}(S) \mid \ell(D) \geq 2\}$$

Se $|D|$ avesse un punto di base P allora $\ell(D-P) = \ell(D) \geq 2$. L'assunzione su D implica $\ell(D-P) < 2$, una contraddizione.
Se $\ell(D) > 2$ allora abbiamo $\ell(D-P) \geq 2$ per ogni $P \in S$, che è una contraddizione.
Da $\ell(D) = 2$ e $|D|$ è senza punti base $|D|$ segue che $\varphi_{|D|} : S \to \mathbb{P}^1$ è un morfismo di grado $\deg(D)$. Cioè

$$\gamma(S) \leq \min\{\deg(D) \mid D \in \operatorname{Div}(S) \mid \ell(D) \geq 2\}.$$

(b) Dimostrare che $\gamma(S) = 1$ se e solo se $S \cong \mathbb{P}^1$.

Soluzione: Si ricordi che se S è una superficie di Riemann compatta che ammette un morfismo di grado uno verso $\mathbb{P}^1$, allora $S \cong \mathbb{P}^1$.

(c) Si dimostri che se $g(S) \geq 2$ allora $\gamma(S) \leq g$. (Suggerimento: notare che $\ell(K) = g$. Mostrare che si può scrivere $K = D_1 + D_2$ con $\ell(D_1) = 2$ e $\deg(D_2) \geq g - 2$.)

Soluzione: Si ricordino i seguenti fatti: Sia D una divisor e P un punto, allora $\ell(D-P) \geq \ell(D) - 1$. Il secondo fatto utile è $\ell(K) = g$.
Sia ora $g \geq 2$. Applicando il primo risultato $g-2$ volte, si trova che per ogni scelto di punti $P_1, \dots, P_{g-2}$ che

$$\ell(K - P_1 - \cdots - P_{g-2}) \geq 2.$$

Così possiamo trovare un divisore D_1' di grado $2g-2-(g-2) = g$ con $\ell(D_1') \geq 2$. Sortraendo ulteriori punti da $K - P_1 - \cdots - P_{g-2}$ troviamo un divisore D_1 con $\ell(D_1) = 2$ e $\deg(D_1) \leq g$.
Adesso abbiamo che

$$\gamma(S) \leq \deg(D_1) = g.$$

(d) Se $g(S) \in \{1, 2\}$, si dimostri che $\gamma(S) = 2$.
Soluzione: La disuguaglianza $\gamma(S) \geq 2$ segue da (b). Rimane da provare $\gamma(S) \leq 2$. Se $g(S) = 2$, allora ciò segue da (c).
Nel caso $g(S) = 2$ segue della parte (c) che $\gamma(S) \leq 2$.
Rimane il caso $g(S) = 1$. Riemann-Roch implica che $\ell(D) = \deg D$ se $\deg(D) > 0$. In particolare per $\deg D = 2$ otteniamo $\ell(D) = 2$ e $\gamma(S) \leq 2$.

(e) Si determinino i possibile valori per $\gamma(S)$ nel caso in cui $g(S) = 3$.
Soluzione: Dalle parte (b) e (c) segue che $2 \leq \gamma(S) \leq 3$. Se prendiamo S della forma $y^2 = f(z)$ con $\deg(f) = 8$ troviamo una curve iperellittica di genere 3.
Una curva lisca in $\mathbb{P}^2$ di grado 4 ha $g(S) = 3$ e $\gamma(S) = 3$.