ESAME SUPERFICI DI RIEMANN - SECONDO APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia S una superficie con una struttura complessa, si dimostri che S è orientabile.

(2) Sia $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ la funzione meromorfa $z \mapsto \frac{(z-6)^3}{(z-1)^4}$. Si determini $\operatorname{div}(f)$. Sia $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento associato a f. Si dimostri che φ ha tre punti di ramificazione.

(3) Sia S una superficie di Riemann compatta. La gonalità $\gamma(S)$ di S è il minimo di $\{\deg(f) \mid f : S \to \mathbb{P}^1\}$.
   (a) Dimostrare che $\gamma(S)$ è uguale a $\min\{\deg(D) \mid D \in \operatorname{Div}(S) \mid \ell(D) \geq 2\}$.
   (b) Dimostrare che $\gamma(S) = 1$ se e solo se $S \cong \mathbb{P}^1$.
   (c) Si dimostri che se $g(S) \geq 2$ allora $\gamma(S) \leq g$. (Suggerimento: notare che $\ell(K) = g$. Mostrare che si può scrivere $K = D_1 + D_2$ con $\ell(D_1) = 2$ e $\deg(D_2) \geq g - 2$.)
   (d) Se $g(S) \in \{1, 2\}$, si dimostri che $\gamma(S) = 2$.
   (e) Si determinino i possibile valori per $\gamma(S)$ nel caso in cui $g(S) = 3$.