ESAME SUPERFICI DI RIEMANN - TERZO APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ la curva definita da $V(y^2z^2 + x^4 + x^2z^2 + z^4)$.
  (a) Si determini l'aperto U più grande di C tale che U è una superficie di Riemann.
  (b) Sia $\varphi : U \to \mathbb{P}^1$ il morfismo dato da $(x : y : z) \mapsto (x : z)$. Si determinino il grado d di φ e l'insieme $S := \{Q \in \mathbb{P}^1 : \#\varphi^{-1}(Q) < d\}$. Per ogni $Q \in S, P \in \varphi^{-1}(Q)$ si determini l'indice di rammificazione e_P.
  (c) Sia X una superficie di Riemann compatta con $U \subset X$ e sia $\psi : X \to \mathbb{P}^1$ un morfismo tale che $\psi|_U = \varphi$. Si determinino $\#(X \setminus U)$, $\psi(X \setminus U)$ e $g(X)$.

(2) Sia X una superficie di Riemann compatta
  (a) Si formuli il teorema dei residue.
  (b) Per un funzione meromorfa $f : X \to \mathbb{C}$ si dimostri che $\operatorname{res}_p \frac{df}{f} = \operatorname{ord}_p(f)$.
  (c) Usando i primi due punti si dimostri che $\sum_p \operatorname{ord}_p(f) = 0$.

.

(3) Sia X una superficie di Riemann compatta con $g(X) \geq 2$ e K una divisore canonico su X. Siano P e Q due punti distinti di X.
  (a) Si dimostri che $\ell(P) = 1$.
  (b) Si dimostri che $\ell(K - P) = g - 1$.
  (c) Si dimostri che da $\ell(K - P - Q) = g - 1$ segue $\ell(P + Q) = 2$.
  (d) Sia $\{f_1, \ldots, f_g\}$ una base di $L(K)$. Si dimostri che la mappa $\psi : X \to \mathbb{P}^{g-1}$ data da $P \mapsto (f_1(P) : \cdots : f_g(P))$ è definito in ogni punto P di X.
  (e) Si dimostra che se φ non è iniettiva allora X è iperellittica.

Date: 6 settembre 2017.