ESAME SUPERFICI DI RIEMANN - TERZO APPELLO A. A. 2016/17

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ la curva definita da $V(y^2z^2 + x^4 + x^2z^2 + z^4)$.

(a) Si determini l'aperto U più grande di C tale che U è una superficie di Riemann.
Soluzione: I punti lisci di una curva algebrica formano una superficie di Riemann (aperto) e una superficie di Riemann è liscia. Quindi U consiste dei punti di C dove C non è singolare. I punti singolari di C sono i punti tali che

$$4x^3 + 2xz^2 = 0,\ 2yz^2 = 0,\ 3y^2z + 2x^2z + 4z^3 = 0.$$

Quindi ogni punto singolare soddisfa $y = 0$ o $z = 0$. Se $z = 0$ allora la prima equazione dà $x = 0$ e troviamo il punto $P_0 = (0 : 1 : 0)$.
Se $y = 0$ e $z = 1$ allora la prima equazione diventa $2x(2x^2 + 1) = 0$. Cioè le possibile soluzioni sarebbero $(0 : 0 : 1)$ e $(\pm\sqrt{-1/2} : 0 : 1)$, ma per tutti i tre punti la terza equazione non è soddisfatta. Così troviamo che $U = C \setminus \{(0 : 1 : 0)\}$.

(b) Sia $\varphi : U \to \mathbb{P}^1$ il morfismo dato da $(x : y : z) \mapsto (x : z)$. Si determinino il grado d di φ e l'insieme $S := \{Q \in \mathbb{P}^1 : \#\varphi^{-1}(Q) < d\}$. Per ogni $Q \in S, P \in \varphi^{-1}(Q)$ si determini l'indice di rammificazione e_P.
Soluzione: Sia $Q = (\alpha : 1) \in \mathbb{P}^1$. Allora $\varphi^{-1}(Q) = \{(\alpha : 0 : 1)\}$ se $\alpha^4 + \alpha^2 + 1 = 0$ e altrimenti $\varphi^{-1}(Q) = \{(\alpha, \pm\beta : 1)$ dove β una radice quadrata di $\alpha^4 + \alpha^2 + 1$. Quindi $d = 2$.
Il polinomio $x^4 + x^2 + 1$ non ha radici multiple (la sua derivata è $4x^3+2x = 2x(2x^2+1)$, una radice comune soddisfa $x = 0$ o $x^2 = -1/2$, che non sono zeri di $x^4 + x^2 + 1$.) Oltretutto $\varphi^{-1}((1 : 0)) = \emptyset$.

$$S = \left\{ (0 : 1), (1 : \alpha_1), \dots, (1 : \alpha_4)\} \mid \alpha_i = \pm\sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}} \right\}.$$

Si controlla direttamente che Il punto in $P_i \in \varphi^{-1}(1 : \alpha_i)$ soddisfa $e_{P_i} = 1$.

(c) Sia X una superficie di Riemann compatta con $U \subset X$ e sia $\psi : X \to \mathbb{P}^1$ un morfismo tale che $\psi|_U = \varphi$. Si determinino $\#(X \setminus U)$, $\psi(X \setminus U)$ e $g(X)$.
Soluzione: Sappiamo che il grado di ψ è 2. Essendo un morfismo tra superfici di Riemann compatte abbiamo che ψ è suriettiva, e che ogni controimmagine consiste do due punti oppure di un punto con $e_p = 1$. In particolare, $\varphi^{-1}(Q) = \psi^{-1}(Q)$ per ogni Q della forma $(1 : \alpha)$. Quindi $X \setminus U \subset \psi^{-1}(\{(0 : 1)\})$, L'insieme $\psi^{-1}(1 : 0)$ consiste da un punto di ramificazione oppure di due punti. Nel primo caso la formula di Riemann-Hurwitz dà

$$2g(X) - 2 = -2 \cdot 2 + 5$$

Date: 6 settembre 2017.

e nel secondo caso dà

$$2g(X) - 2 = -2 \cdot 2 + 4.$$

Nel primo caso abbiamo $g(X) = 3/2$ e nel secondo caso $g(X) = 1$. Siccome $g(X) \in \mathbb{Z}$ concludiamo che siamo nel secondo caso. Quindi $\#X \setminus U = 2$ e $\psi(X \setminus U) = \{(1:0)\}$.

(2) Sia X una superficie di Riemann compatta
   (a) Si formuli il teorema dei residue.
   Soluzione: Se ω è una forma differenziale meromorfa su X, allora $\sum_{p \in X} \operatorname{res}_p(\omega) = 0$.
   (b) Per un funzione meromorfa $f : X \to \mathbb{C}$ si dimostri che $\operatorname{res}_p \frac{df}{f} = \operatorname{ord}_p(f)$.
   Soluzione: Sia $\varphi : U \subset V$ una carta tale che $\varphi(p) = 0$. Allora $f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{C}$ è della forma $z^e h(z)$ con $e \in \mathbb{Z}$, $h(z)$ meromorfa su V e olomorfa in 0 con $h(0) \neq 0$. Allora $e = \operatorname{ord}(f)$ e $d(f) = d(z^e h) = (z^e h)' dz = (ez^{e-1}h(z) + z^e h'(z))dz$.
   La forma differenziale $\frac{df}{f}$ si può scrivere in V come

$$\frac{ez^{e-1}h(z) + z^e h'(z)}{z^e h(z)} dz = \left(\frac{e}{z} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right) dz$$

   La funzione h è olomorfa e non zero in $z = 0$. Quindi $(h(z))^{-1}$ è anch'essa olomorfa in $z = 0$. Così troviamo $\operatorname{res}_P(\frac{df}{f}) = e$
   (c) Usando i primi due punti si dimostri che $\sum_p \operatorname{ord}_p(f) = 0$.
   Soluzione:

$$0 = \sum_{p \in X} \operatorname{res}_p \left(\frac{df}{f} \right) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f)$$

.

(3) Sia X una superficie di Riemann compatta con $g(X) \geq 2$ e K una divisore canonico su X. Siano P e Q due punti distinti di X.
   (a) Si dimostri che $\ell(P) = 1$.
   Soluzione: Abbiamo $1 \in L(P)$. Se $\ell(P) > 1$ allora una funzione non costante meromorfa $f : X \to \mathbb{C}$ in $L(P)$ si estende ad un isomorfismo $X \to \mathbb{P}^1$, il che contraddice $g(X) \geq 2$.
   (b) Si dimostri che $\ell(K - P) = g - 1$.
   Soluzione: Applicando Riemann-Roch troviamo

$$\ell(K-P) = \deg(K-P) - g + 1 + \ell(K - (K-P)) = 2g - 2 - 1 - g + 1 + 1 = g - 1.$$

   (c) Si dimostri che da $\ell(K - P - Q) = g - 1$ segue $\ell(P + Q) = 2$.
   Soluzione: Applicando Riemann-Roch troviamo

$$g-1 = \ell(K-P-Q) = \deg(K-P-Q) - g + 1 + \ell(P+Q) = 2g-2-2-g+1+\ell(P+Q)$$

   Quindi $\ell(P + Q) = 2$.
   (d) Sia $\{f_1, \ldots, f_g\}$ una base di $L(K)$. Si dimostri che la mappa $\psi : X \to \mathbb{P}^{g-1}$ data da $P \mapsto (f_1(P) : \cdots : f_g(P))$ è definito in ogni punto P di X.
   Soluzione: Se ψ non è definita in P allora P è un punto base di $|K|$. I punti di base di $|K|$ sono i punti P tali che $\ell(K-P) = \ell(K)$. Sappiamo che $\ell(K) = g$ e dal punto (2) segue che $\ell(K - P) = g - 1$ per ogni $P \in X$. Allora non ci sono punti di basi e ψ è definita per ogni $P \in X$.
   (e) Si dimostra che se φ non è iniettiva allora X è iperellittica.

Soluzione: Se per ogni $P, Q \in X$ con $P \neq Q$ abbiamo $\ell(K - P - Q) = \ell(K) - 2(= g - 2)$, allora ψ é iniettiva. Dunque, se ψ non é iniettiva allora ci sono punti P e Q con $\ell(K - P - Q) > g - 1$.
Da $\ell(K - P) = g - 1$ segue adesso che $\ell(K - P - Q) = g - 2$ e che $\ell(P + Q) = 2$. Allora $|P + Q|$ definisce un mappa razionale non constante $\tau : X \to \mathbb{P}^1$. Un punto di base R di $|P + Q|$ è un punto tale che $\ell(P + Q - R) = \ell(P + Q) = 2$, ma, analogamente al punto (1), sappiamo che $\ell(D) \leq 1$ per ogni D di grado 1. Cosi non ci sono punti di base e troviamo che τ definisce un morfismo di grado 2 $X \to \mathbb{P}^1$. Perciò X è iperellittica.