ESAME SUPERFICI DI RIEMANN - QUATTRO APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia $\mathbb{T} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i)$. Sia $N \geq 2$ un intero. Si determinino tutti i punti con ordine un divisore di N. Sia $\mathbb{T}[N]$ il sottogruppo dei punti di ordine un divisore di N. Si determini il numero minimale di generatori di $\mathbb{T}[N]$.

Soluzione Sia $z \in \mathbb{T}$ un punto. Allora z è la classe di un numero $x+iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Questo punto è unico modulo l'addizione di interi e multipli interi di i. In particolare possiamo assumere che $0 \leq x < 1$ e $0 \leq y < 1$.

Il punto z ha ordine un divisor di N se e solo $N(x+iy) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$. Questo è equivalente a

$$x = \frac{k}{N}, y = \frac{m}{N}$$

con $k, m \in \mathbb{Z}$ e troviamo che

$$\mathbb{T}[N] = \left\{ \frac{k}{N} + i\frac{m}{N} \mid k, m \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k < N, 0 \leq m < N \right\}.$$

Quindi ci sono N^2 punti con questa properietà. Se un gruppo di N^2 elemento è generato du un elemento solo allora quel gruppo ha un elemento di ordine N^2. Per definizione, gli elementi di $\mathbb{T}[N]$ ha ordine al massimo N. Quindi ci sono almeno due generatori. Sappiamo dalla descrizione di $\mathbb{T}[N]$ che potrebbe essere generato da $\frac{1}{N}$ e $\frac{1}{N}i$. Quindi il numero minimo di generatori è due.

(2) Siano C, C' superfici di Riemann compatte, con $g(C) > 1$. Sia $\varphi : C \to C'$ un rivestimento di grado $d \geq 2$, tali che la controimmagine di ogni punto di C' è composta da d punti, oppure da un punto solo. Si dimostri che $d \leq 2g(C) + 1$.

Soluzione: La mappa $C \to C'$ è di grado d, e ha t punti con ramificazione $d-1$ e nessun'altra ramificazione. Allora, con Riemann-Hurwitz troviamo che

$$2g(C) - 2 = d(2g(C') - 2) + t(d-1).$$

Nel caso in cui $g(C') = 0$ troviamo che $2g(C) - 2 = (t-2)d - t$. Da $g(C) > 1$ segue che $(t-2)d - t > 0$, e che $t \geq 3$. Allora

$$d = \frac{2g(C) - 2 + t}{t - 2} = 1 + \frac{2g(C)}{t-2} \leq 2g(C) + 1.$$

Nel caso in cui $g(C') = 1$ troviamo in modo simile che $t > 0$ e $d = 1 + \frac{2g(C)-2}{t} \leq 2g(C) - 1$.

Nel caso in cui $g(C') > 1$ troviamo $2g(C') - 2 + t \geq 2$ e

$$d = \frac{2g(C) - 2 + t}{2g(C') - 2 + t} = 1 + \frac{2g(C) - 2g(C')}{2g(C') - 2 + t} \leq 1 + g(C) - g(C').$$

(3) Sia $C_0 \subset \mathbb{C}^2$ la curva definita da $y^2 = x^{2k+2} + x + 4$.

(a) Si trovi una altra curve $C_1 \subset \mathbb{C}^2$, aperti $U_i \subset C_i$ e un mappa biolomorfa $\varphi : U_0 \to U_1$ tali che la curva ottenuta incollando C_0 e C_1 lungo φ sia una superficie di Riemann compatta C.

Date: 21 settembre 2017.

Soluzione: La scelta più semplice è di prendere

$$C_1 : z^2 = 4w^{2k+2} + w^{2k+1} + 1.$$

La mappa $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{y}{x^{k+1}})$, definisce una mappa biolomorfa tra $C_0 \setminus \{(0, 2), (0, -2)\}$ e $C_1 \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$.
Per vedere che C è compatta, si può usare la mappa $U_0 \to \mathbb{C}$ definita da $(x, y) \mapsto x$. Si può prolungarla ad un morfismo $C \to \mathbb{P}^1$: Su $U_0 \cap U_1$ questa mappa è anche data da $(w, z) \mapsto 1/w$. Quindi si può estenderla al morfismo $C \mapsto \mathbb{P}^1$ definito da $(x, y) \mapsto (x : 1)$ e $(w, z) \mapsto (1 : w)$. In particolare, C è un rivestimento doppio ramificato di $\mathbb{P}^1$.
Per vedere che C è compatta basterebbe mostrare che ogni insieme infinito S ha un limite. Prendiamo adesso un insieme infinito $S \subset C$. Allora l'immagine di S è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{P}^1$. Dal fatto che $\mathbb{P}^1$ è compatto segue che $\varphi(S)$ ha un limite λ.
Assumiamo che λ non è un valore critico. Siano μ_1, μ_2 le due controimmagini di λ. Se μ_2 è un limite di S allora siamo a posto. Altrimenti, basta mostrare che ogni intorno aperto U_1 di μ_1 soddisfa $U_1 \cap S \neq \emptyset$.
Prendiamo un intorno U_1 piccolo di μ_1. Sia $U = \varphi(U_1)$. Se prendiamo U_1 sufficientemente piccolo abbiamo che $\varphi^{-1}(U) = U_1 \cup U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e U è un intorno aperto di λ. Allora $U \cap \varphi(S) \neq \emptyset$. In particolare $(U_1 \cup U_2) \cap S \neq \emptyset$.
Dal fatto che μ_2 non é un limite di S segue che possiamo prendere U_1 sufficientemente piccolo tali che $U_2 \cup S = \emptyset$. Quindi $U_1 \cup S \neq \emptyset$.
Il caso dove λ è un valore critico si tratta in modo analogo.

(b) Consideriamo $\omega = \frac{dx}{y}$ come differenziale su C. Si determini $\operatorname{kdiv}(\omega)$.
Soluzione:
La funzione x definisce una mappa $C_0 \to \mathbb{C}$. Usando il teorema di Dini si vede che questa mappa è localmente invertibile precisamente quando $y \neq 0$. In particolare, per i punti (x, y) t.c. $y \neq 0$, abbiamo che $\operatorname{ord}_p(\omega) = 0$. Se $p = (\alpha, 0)$, allora possiamo scrivere $y^2 = (x - \alpha)g(x)$, con $g(\alpha) \neq 0$, e troviamo che y è una coordinata locale. Allora

$$\frac{dx}{y} = \frac{d(x-\alpha)}{y} = \frac{d(y^2/(g(x)))}{y} = \frac{ud(y^2)}{y} = \frac{2yudy}{y} = udy$$

con u una funzione nonzero in $(\alpha, 0)$. In particolare, troviamo $\operatorname{ord}_p(\omega) = 0$.
Passando allaltro aperto troviamo

$$\frac{dx}{y} = \frac{d(1/w)}{z/w^{k+1}} = \frac{-dw/w^2}{zw^{k+1}} = -w^{k-1}\frac{dw}{z}.$$

Sia $P_1 = (0, 1)$ e $P_2 = (0, -1)$, allora abbiamo che w è un coordinate locale a ambi punti e troviamo che $\operatorname{kdiv}(\omega) = (k - 1)(P_1 + P_2)$.

(c) Si determini $g(C)$.
Soluzione:

$$2g(C) - 2 = \deg(\operatorname{kdiv}(\omega)) = 2(k - 1).$$

Quindi $g(C) = k$.
Come alternativa si può usare la mappa $(x, y) \mapsto x$. Questa mappa definisce un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^1$ ramificato in $2k + 2$ punti. Quindi, applicando Riemann-Hurwitz troviamo $2g(C) - 2 = 2(-2) + 2k + 2$.