ESAME SUPERFICI DI RIEMANN A.A. 2016/17 - QUINTO APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ il morfismo definito estendendo la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = z^4 + 8z^3$.
   (a) Si determini $\operatorname{div}(f)$.
   (b) Si determinino i punti di ramificazione di φ con i rispettivi indici di ramificazione.

(2) Siano $\Lambda_i = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ e $\mathbb{T}_i = \mathbb{C}/\Lambda_i$. Sia $O \in \mathbb{T}_i$ l'origine $0 + \Lambda_i$. Si consideri la mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = (1+i)z$.
   (a) Si dimostri che f induce un morfismo $\varphi : \mathbb{T}_i \to \mathbb{T}_i$.
   (b) Si determini il grado di φ.
   (c) Si determinino tutti i punti $P \in \mathbb{T}_i$ tali che $\varphi(P) = O$.

(3) (a) Si formuli il teorema di Riemann-Roch.
   (b) Si dimostri che vale $\ell(D) \leq \deg D + 1$, se $\deg(D) \geq 0$.
   (c) Si dimostri che $\deg(D) \geq g + 1$ vale allora $\ell(D) \geq 2$.
   (d) Sia C la superficie di Riemann compatta che contiene la curva piana
   $$y^2 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$
   Si determini $g(C)$.
   (e) Sia C come nel punto precedente. Sia $P = (1, 0)$. Si determini $\ell(2P)$.

Date: 9 Febbraio 2018 - 9:00-11:00.