ESAME SUPERFICI DI RIEMANN A.A. 2016/17 - QUINTO APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ il morfismo definito estendendo la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = z^4 + 8z^3$.

(a) Si determini $\operatorname{div}(f)$.
Soluzione: $\operatorname{div}(f) = 3(0) + (-8) - 4(\infty)$.

(b) Si determinino i punti di ramificazione di φ con i rispettivi indici di ramificazione.
Soluzione: Il morfismo φ è di grado 4 e ha indice di ramificazione 3 a $z = 0$ e indice 4 ain$z = \infty$. Gli altri punti di ramificazione corrispondono ai valori di t tali che $f(z) = t, \frac{\partial}{\partial z}(f(z) - t) = 0$ ha soluzioni.
Nel nostro caso troviamo $f'(z) = 4z^3 + 8z^2$, quindi $f'(z)$ si annulla se e solo se $z = 0$ oppure $z = -2$. Dalla formula di Riemann-Hurwitz segue che l'indice di ramificazione di in $z = -2$ è al massimo 2, quindi è 2.

(2) Siano $\Lambda_i = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ e $\mathbb{T}_i = \mathbb{C}/\Lambda_i$. Sia $O \in \mathbb{T}_i$ l'origine $0 + \Lambda_i$. Si consideri la mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = (1 + i)z$.

(a) Si dimostri che f induce un morfismo $\varphi : \mathbb{T}_i \to \mathbb{T}_i$.
Soluzione: Una mappa della forma $f(z) = \alpha z$ definisce un morfismo di superfici di Riemann $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, che è contemporaneamente un omomorfismo di gruppi. Una mappa di questo tipo definisce un morfismo $\mathbb{T}_i \to \mathbb{T}_i$ se e solo se $\alpha\Lambda_i \subset \Lambda_i$. Basta controllare l'ultima condizione sui generatori di Λ_i. Si noti che $(1+i)1 = 1+i \in \Lambda_i$ e $(1+i)i = -1+i \in \Lambda_i$.

(b) Si determini il grado di φ.
Soluzione: Dalla formula di Riemann-Hurwitz segue che un morfismo tra superfici di Riemann di genere 1 è non ramificato. Quindi il grado è il numero di punti nella controimmagine di un punto qualsiasi di $\mathbb{T}$.
I punti in T_i si possono identificare con $\{a+bi \mid 0 \leq a < 1, 0 \leq b \leq 1\}$.
Un punto di questo tipo viene mandato in $(a + bi)(1 + i) = (a - b) + (a + b)i$.
Quindi $\varphi(P) = O$ se e solo se $a - b \in \mathbb{Z}$ e $a + b \in \mathbb{Z}$. Se $a - b = k$ e $a+b = m$ allora dev'essere $a = \frac{k+m}{2}$ e $b = \frac{m-k}{2}$. Quindi $0 \leq k+m < 2$ e $0 \leq m - k < 2$.
Se $k + m = 0$ troviamo che la seconda disuguaglianza diventa $0 \leq -2k \leq 2$. Quindi $k = m = 0$. Allora $a = b = 0$.
Se $k + m = 1$ allora $0 \leq 1 - 2k \leq 2$. Quindi $k = 0$ e $m = 1$. Allora $a = b = 1/2$.
Allora, $\varphi^{-1}(O) = \{O, \frac{1}{2}(1 + i)\}$ e $\deg(\varphi) = 2$.

Date: 9 Febbraio 2018 - 9:00-11:00.

(c) Si determinino tutti i punti $P \in \mathbb{T}_i$ tali che $\varphi(P) = O$.
Soluzione: Vedi sopra.

(3) (a) Si formuli il teorema di Riemann-Roch.
Soluzione: Sia C una superficie di Riemann compatta. Sia D un divisore su C e K un divisore canonico. Sia

$$\ell(D) = \dim\{f \in K(C)^* \mid \operatorname{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}.$$

Allora vale l'uguaglianza

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g(C).$$

(b) Si dimostri che vale $\ell(D) \leq \deg D + 1$, se $\deg(D) \geq 0$.
Soluzione: Se $\deg(D) < 0$ allora $\ell(D) = 0$. Per tutti i D abbiamo che $\ell(D + P) \leq \ell(D) + 1$. Quindi se $\deg(D) = 0$ allora $\ell(D) \leq \ell(D - P) + 1 = 1$. Adesso possiamo concludere per con induzione su $\deg(D)$.

(c) Si dimostri che $\deg(D) \geq g + 1$ vale allora $\ell(D) \geq 2$.
Soluzione: In questo caso

$$\ell(D) \leq \deg(D) + 1 - g(C) = g + 1 + 1 - g = 2.$$

(d) Sia C la superficie di Riemann compatta che contiene la curva piana

$$y^2 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Si determini $g(C)$.
Soluzione: La mappa $(x, y) \mapsto x$ ha grado 2. In questa carta troviamo già 5 punti di ramificazione, con indice di ramificazione 2. All'infinito ci sono uno o due punti. Da Riemann-Hurwitz segue che

$$2g(C) - 2 = -4 + c$$

dove c è il numero di punti di ramificazione. Quindi c è pari, c'è ramificazione all'infinito e $c = 6$. Quindi $g(C) = 2$.

(e) Sia C come nel punto precedente. Sia $P = (1, 0)$. Si determini $\ell(2P)$.
Soluzione: Sappiamo che se $\ell(P) = 2$ allora $C = \mathbb{P}^1$. Quindi $\ell(P) \leq 1$. Dal fatto che P è effettivo segue che $\ell(P)$ è 1 e quindi $\ell(2P) \leq 2$.
Consideriamo adesso $x - 1$. Allora l'unico zero è $(1, 0)$. In tale punto $(x - 1)$ non è un coordinate locale, ma y lo è. Quindi l'unico zero di $x - 1$ in questa carta è P con moltiplicità 2. C'è un unico punto all'infinito, che per avere $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$ deve essere un polo di ordine 2. Quindi $\{1, \frac{1}{x-1}\}$ sono in $\ell(2P)$ e $\ell(2P) \geq 2$.
Da ciò si conclude $\ell(2P) = 2$.