ESAME SUPERFICI DI RIEMANN - UN POSSIBILE APPELLO

REMKE KLOOSTERMAN

(1) Sia C la curva $Y^2Z^4 + X^6 + Z^6 = 0$. Determinare tutti i punti singolari. Sia ℓ una retta passante per $(0:1:0)$, si dimostri che ℓ interseca C in al più tre punti. Si determinino tutte le rette passanti per $(0:1:0)$ che intersecano C in al più due punti.

Sia $\tilde{C}$ la risoluzione della singolarità di C. Sia μ una retta passante per $(0:1:0)$ che interseca C in tre punti distinti. Siano P, Q i punti di intersezione diversi da $(0:1:0)$. Si dimostri che la proiezione da $(0:1:0)$ induce un morfismo $\varphi : \tilde{C} \to \mathbb{P}^1$ il cui sistema lineare associato è $|P+Q|$. Si determini il grado e il luogo di ramificazione di questo morfismo. Si determini il genere $g(\tilde{C})$.

(2) Sia $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$. Sia $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$ la mappa indotta dalla mappa $z \mapsto z(1+i)$. Si determini il grado della mappa e i punti di ramificazione. Si noti che f è un omomorfismo di gruppi, determinare il nucleo di f. Determinare tutti i punti di $\mathbb{C}/\Lambda$ di ordine n.

(3) Sia S una superficie di Riemann di genere 2 e $O \in S$ un suo punto. Sia $\varphi : S \times S \to \mathrm{Pic}^0(S)$ la mappa $(P, Q) \to P + Q - 2O$.
   (a) Si dimostri che se $\varphi(P+Q) = \varphi(R+S)$ se solo se $R + S \in |P+Q|$.
   (b) Si determini tutte le classe $[D]$ tali che $\deg(D) = 2$ e $\ell(D) > 1$.
   (c) Si determini tutte le classi $[D]$ tali che $\varphi^{-1}([D])$ è un punto, tutte le classi tali che $\varphi^{-1}([D])$ consiste di due punti, e tutte le classe tali che $\varphi^{-1}([D])$ è infinito.