TEMA C

Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Somma	Voto finale

Prova scritta di Analisi del primo anno per il corso di Laurea in Matematica 16/03/09.

COGNOME.................. NOME.................. MATRICOLA..................

Avvertenze. Durante il tempo concesso NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrà comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. Nello svolgere ciascun esercizio, lo studente può dare per scontati, limitandosi a citarli, solo enunciati in programma: ogni altra affermazione deve essere scrupolosamente dimostrata. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo e nelle pagine seguenti di questo ciclostilato che precedono l'eventuale esercizio successivo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. **Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato**.

Si prevede che l'esito della prova sarà comunicato entro il 22/03/09.

La visione compiti è fissata per il 23/03/09 alle ore 9.00 in aula 2BC60 .

Quesito 1.

a) Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi e sia $w \in \mathbb{C}$.
Cosa significa che $\lim_{n\to+\infty} z_n = w$? Dare due formulazioni, una con gli intorni del limite e una con la distanza euclidea.

b) Sia $E \subseteq \mathbb{C}$. Si dica cos'è $\operatorname{Fr} E$, cioè la frontiera di E. Si fornisca inoltre la caratterizzazione dei punti di frontiera usando gli intorni.

c) Sia E così definito:

$$E = \left\{ n \sin \frac{1}{n+1} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)^n \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. Trovare e disegnare il derivato di E.
2. Dire chi è $\operatorname{Fr} E$.
3. Dire chi è l'interno di E.

d) Stesse domande per l'insieme F così definito:

$$F = \{ x + iy \in \mathbb{C} : \; x, y \in \mathbb{R} \text{ e inoltre } y^2 < x < |y| \}$$

Risposta:

Quesito 2.

a) Dopo aver fornito la definizione di “o piccolo”, enunciare il principio di sostituzione degli infinitesimi.

b) Scrivere la formula di Taylor con punto iniziale $x = 0$ e resto di Peano $o(x^3)$ per la funzione $\sqrt{1+x}$.

c) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \frac{1}{2}\sin x - \cos x}{(2^x - 1)^\alpha}$$

e riportare con cura i valori trovati nella seguente tabella

Valore di α	Valore del limite

Risposta:

Quesito 3.

a) Dare la definizione di integrale generalizzato per una funzione $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, ove $-\infty < a < b \leq +\infty$.

b) Determinare $\beta > 0$ tale che $((\pi/2) - \arctan x)$ sia dello stesso ordine di $\frac{1}{x^\beta}$ per $x \to +\infty$.

c) Sia, per ciascun $\alpha > 0$, f_α la funzione di $]0, +\infty[$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) \equiv \frac{((\pi/2) - \arctan x)^\alpha}{(\arctan x)^\alpha((\pi/2) + \arctan x)(x^2 + 1)^\alpha} \qquad \forall x \in]0, +\infty[\,.$$

Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione f_α è integrabile in senso generalizzato.

d) Calcolare

$$\int_1^\infty f_1(x)\, dx\,.$$

Risposta:

Quesito 4.

a) Enunciare il criterio della radice per le serie.

b) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sin x)^n}{2n + e^{3x}}$$
al variare di $x \in [0, 2\pi[$.

Risposta: