Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Somma	Voto finale

Prova scritta di Analisi del primo anno per il corso di Laurea in Matematica 22/09/09.

COGNOME.................... NOME.................... MATRICOLA....................

Avvertenze. Durante il tempo concesso NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrà comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. Nello svolgere ciascun esercizio, lo studente può dare per scontati, limitandosi a citarli, solo enunciati in programma: ogni altra affermazione deve essere scrupolosamente dimostrata. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo e nelle pagine seguenti di questo ciclostilato che precedono l'eventuale esercizio successivo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. **Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato**.

Si prevede che l'esito della prova sarà comunicato entro il 24/09/09.

La visione compiti è fissata per il 24/09/09 alle ore 9.00 in aula 1AD100 .

Quesito 1.

a) Dare la definizione di chiusura e di derivato per un sottoinsieme della retta reale; dare poi la definizione e la caratterizzazione di *punto di chiusura*.

b) Determinare la chiusura e il derivato dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, dopo averli rappresentati sull'asse reale:

$$\begin{aligned} A &= \{2^{\frac{1}{n}} \ : \ n = 1, 2, \ldots\} \\ B &= \{\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \ : \sin x = \sin 1\} \\ D &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos x > \cos 4\} \end{aligned}$$

Risposta:

Quesito 2.

a) Scrivere la formula di Taylor con punto iniziale $x_0 = 0$ per la funzione $\cos x$ almeno fino al termine di quarto grado, con il resto nella forma che il candidato preferisce.

b) Scrivere la formula di Taylor con punto iniziale $x_0 = 0$ per la funzione $\log(1 + \sin x)$ almeno fino al termine di secondo grado, con il resto nella forma che il candidato preferisce.

c) Determinare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + \sin x) - x^\alpha}{\frac{1}{2}x^\alpha - 1 + \cos x}$$

d) Scrivere, con il linguaggio degli intorni, cosa significa che:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2,$$

specificando la condizione che deve soddisfare il punto 0.

Risposta:

Quesito 3.

a) Dare la definizione di funzione integrale per una funzione f definita su un intervallo I di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ ed enunciare il Teorema di Torricelli (che descrive le proprietà della funzione integrale).

b) Dire per quali $\alpha \in]0,+\infty[$ la funzione f_α di $]0,+\infty[$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}, \ \forall x \in]0,+\infty[$$

è integrabile in senso generalizzato in $]0,1]$ e per quali $\alpha \in]0,+\infty[$ è integrabile in senso generalizzato in $[1,+\infty[$.

c) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(5/2)\sin(2x) + \cos x}{\sin^2 x - 4\sin x + 4}\, dx \, .$$

Risposta:

Quesito 4.

a) Enunciare il criterio del confronto asintotico per le serie numeriche.

b) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)^{\alpha} x^n$$

converge, al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Risposta: