TEMA C

Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Somma	Voto finale

Prova scritta di Analisi del primo anno per il corso di Laurea in Matematica 27/03/09.

COGNOME.................. NOME.................. MATRICOLA..................

Avvertenze. Durante il tempo concesso NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrà comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. Nello svolgere ciascun esercizio, lo studente può dare per scontati, limitandosi a citarli, solo enunciati in programma: ogni altra affermazione deve essere scrupolosamente dimostrata. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo e nelle pagine seguenti di questo ciclostilato che precedono l'eventuale esercizio successivo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. **Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato**.

Si prevede che l'esito della prova sarà comunicato entro il 31/03/09.

La visione compiti è fissata per il 01/04/09 alle ore 9.00 in aula 1A150 .

Quesito 1.

a) Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi e sia $w \in \mathbb{C}$.
Cosa significa che $\lim_{n\to+\infty} z_n = w$? Dare due formulazioni, una con gli intorni del limite e una con la distanza euclidea.

b) Sia E così definito:

$$E = \left\{ i^n + \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{3}\right)^n \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. Trovare e disegnare il derivato di E.
2. Dire chi è la frontiera di E.
3. Dire chi è l'interno di E.

c) Stesse domande per l'insieme F così definito:

$$F = \{x + iy \in \mathbb{C} : \ x, y \in \mathbb{R} \text{ e inoltre } y^3 < x < y^2\}$$

Risposta:

Quesito 2. Sia $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1)\exp\left(\frac{-1}{x+2}\right) & \text{se } x > -2, \\ 0 & \text{se } x = -2. \end{cases}$$

a) Determinare in quali punti f è continua.
Determinare poi il limite a $+\infty$ e l'eventuale asintoto obliquo di f (ricordare che se $\sigma(x)$ è infinitesima a $+\infty$ allora $\exp\sigma(x) - 1$ è asintotica a $\sigma(x)$ ...).

b) Calcolare la derivata prima per $x > -2$.
Dire poi se f è derivabile in -2.
Studiare infine il segno della derivata prima e gli intervalli di monotonia di f.

c) Trovare gli estremanti locali e assoluti; trovare poi l'immagine di f.

d) Sia $E = [0, +\infty[$ e sia $G = f(E)$. Trovare G.
Sia $h : E \to G$ definita da $h(x) = f(x)\ \forall x \in E$.
È vero che h è un omeomorfismo?
È vero che h è un diffeomorfismo?

Risposta:

Quesito 3.

a) Enunciare il criterio del confronto asintotico per integrali generalizzati (su un intervallo $[a, b[$).

b) Scrivere la formula di Taylor arrestata ai termini di grado 2 con resto di Peano e punto iniziale $\frac{\pi}{2}$ per la funzione cos.

c) Scrivere la formula di Taylor arrestata ai termini di grado 2 con resto di Peano e punto iniziale $\frac{\pi}{2}$ per la funzione $1 - \sin$.

d) Sia, per ciascun $\alpha > 0$, f_α la funzione di $]0, \frac{\pi}{2}[$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) \equiv \frac{\cos^{2\alpha} x}{(1 - \sin x)\sin^\alpha x} \qquad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\,.$$

Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione f_α è integrabile in senso generalizzato.

e) Calcolare

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{(1 - \sin x)\sin x}\, dx\,.$$

Risposta:

Quesito 4.

a) Enunciare il criterio dell'integrale per le serie.

b) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^{\alpha} x^n$$

converge, al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Risposta: