Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Somma	Voto finale

Prova scritta di Analisi del primo anno per il corso di Laurea in Matematica 27/07/09.

COGNOME.................. NOME.................. MATRICOLA..................

Avvertenze. Durante il tempo concesso NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrà comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. Nello svolgere ciascun esercizio, lo studente può dare per scontati, limitandosi a citarli, solo enunciati in programma: ogni altra affermazione deve essere scrupolosamente dimostrata. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo e nelle pagine seguenti di questo ciclostilato che precedono l'eventuale esercizio successivo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. **Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato**.

Si prevede che l'esito della prova sarà comunicato entro il 30/07/09.

La visione compiti è fissata per il 30/07/09 alle ore 9.00 in aula 1AD50 .

Quesito 1.

a) Dare la definizione di spazio metrico sequenzialmente compatto; enunciare il teorema fondamentale che descrive i sottoinsiemi sequenzialmente compatti del piano reale.

b) Si consideri la successione $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ di numeri complessi così definita

$$z_n = i^n + \frac{3-i}{n+1}, \qquad n \geq 1.$$

Determinare i limiti delle sottosuccessioni convergenti di $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

c) Disegnare il sottoinsieme E del piano complesso così definito

$$E = \{x + iy \in \mathbb{C} : \ x, y \in \mathbb{R}, \ \ |x| + y^2 \leq 1\}$$

È vero che E è sequenzialmente compatto? Perché? È vero che E è connesso? Perché?

Risposta:

Quesito 2. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri la funzione f_α di $[0, +\infty[$ in $\mathbb{R}$ così definita

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ x^\alpha e^{-x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Dimostrare che f_α è continua per ogni $\alpha > 0$ e determinare il $\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x)$.

b) Dimostrare che l'immagine di f_α è un intervallo chiuso e limitato.

c) Determinare la derivata prima e seconda di f_α per $x > 0$.

d) Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione f_α è di classe C^1.

e) Determinare crescenza, decrescenza, massimi e minimi di f_α.

f) Studiare la convessità, concavità e flessi di f_α discutendo il numero di flessi di f_α al variare di $\alpha > 0$.

g) Disegnare il grafico delle funzioni $f_{\frac{1}{2}}$, f_1, f_2.

Risposta:

Quesito 3.

a) È vero che se una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora il suo supporto è compatto? Se sì, perchè?

b) Sia, per ciascun $\alpha > 0$, f_α la funzione di $]0, +\infty[$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) \equiv \frac{x^5 e^{-x^2}}{(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2})^{\alpha - 1}} \qquad \forall x \in]0, +\infty[\,.$$

Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione f_α è integrabile in senso generalizzato.

c) Dire se f_1 è integrabile in senso generalizzato eventualmente calcolando

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)\, dx\,.$$

Risposta:

Quesito 4.

a) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze.

b) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-(1/n^\alpha)}}{n^{-2\alpha}} \right) x^n$$

converge, al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Risposta: