FOGLIO 1

Esercizio 1 Sia f la funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}, \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1\}$.
(i) Determinare i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$ e calcolare in tali punti il valore di f.
(ii) Provare che f ammette punti di massimo e minimo assoluti in A e dedurre da (i) che tali punti stanno sulla frontiera di A.
(iii) Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange determinare i punti di massimo e minimo di cui al punto (ii).
(Risulta: massimi in $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, minimi in $\pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.)

Esercizio 2 Sia f la funzione lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = ax+by, \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange calcolare

$$\max_{x^2+y^2=1} f(x,y), \quad \text{e} \quad \min_{x^2+y^2=1} f(x,y)$$

e dedurre una formula per la norma $\|f\|$ (norma di f come operatore lineare e continuo). Estendere il risultato a funzioni lineari di $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}$.
(Risulta $\|f\| = \sqrt{a^2+b^2}$.)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = xyz^3, \quad \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+4y^2+2z^6 \leq 6\}$.
(i) Osservare che A è un insieme compatto.
(ii) Osservare che la frontiera di A è data da

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+4y^2+2z^6 = 6\}.$$

(iii) Determinare i punti critici di f in $\mathbb{R}^3$ e calcolare in tali punti il valore di f.
(iv) Dedurre da (i) e (iii) che f ammette massimo e minimo assoluto in A e che i punti di massimo e minimo assoluto si trovano sulla frontiera di A.
(v) Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange calcolare il massimo e il minimo assoluto di f su A.
(Risulta Max $= 1$, Min $= -1$.)

Esercizio 4 Nello spazio euclideo tridimensionale (O,x,y,z), si consideri il piano $\mathcal{P}$ di equazione $ax+by+cz=d$, ove $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sono fissati. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange calcolare

$$\min_{ax+by+cz=d} x^2+y^2+z^2,$$

deducendone una formula per la distanza di $\mathcal{P}$ dall'origine O. Estendere il risultato a iperpiani di $\mathbb{R}^N$.
(Risulta $|d|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.)