FOGLIO 2

Esercizio 1 Risolvere le seguenti equazioni usando il classico metodo risolutivo per equazioni lineari del primo ordine:

(i) $y' = \alpha y + \beta, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\qquad [y(x) = ce^{\alpha x} - \beta/\alpha]$

(ii) $y' = \frac{y}{x} + xe^x$ $\qquad [y(x) = xe^x + cx]$

(iii) $y' = y \tan x + 1, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$ $\qquad [y(x) = \tan x + c/\cos x]$

(iv) $y' = -|x|y + |x|$ $\qquad [y(x) = 1 + ce^{-\mathrm{sgn} x\, x^2/2}]$

Esercizio 2 Sia f la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(y) = \begin{cases} |y| \log |y|, & \text{se } y \neq 0, \\ 0, & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

e si consideri il problema di Cauchy

$$(P) \begin{cases} y' = f(y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

(i) La funzione f è continua? È localmente Lipschitziana?

(ii) Cosa si può concludere usando noti teoremi circa l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di (P) al variare di $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$?

(iii) Usando il metodo della separazione delle variabili, risolvere esplicitamente il problema (P) nel caso $x_0 = 0$ e disegnare il grafico delle soluzioni. Confrontare il risultato ottenuto con quanto era stato possibile prevedere in (ii).

(Risulta: $y(x) = \mathrm{sgn} y_0 e^{e^{x \mathrm{sgn} y_0} \log |y_0|}$ ove è inteso sgn0=0.)

Esercizio 3 Si consideri il problema

$$(P) \begin{cases} y' = \frac{y \log y}{x}, & x > 0, \\ \lim_{x \to 0^+} y(x) = y_0. \end{cases}$$

Usando il metodo della separazione delle variabili discutere esistenza ed unicità delle soluzioni al variare di $y_0 \in]0, +\infty[$ e disegnare il grafico delle soluzioni. Il fatto che in alcuni casi la soluzione esiste ma non è unica e in altri non esiste, contraddice qualche teorema noto di esistenza e unicità?

(Risulta $y(x) = e^{cx}$. Nessuna contraddizione.)

Esercizio 4 (Pennello di Peano) Sia $0 < \alpha < 1$. Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ con $c_1 < c_2$ sia $f_{c_1 c_2}$ la funzione definita da

$$f_{c_1 c_2}(x) = \begin{cases} -(c_1 - x)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & \text{se } x \leq c_1, \\ 0, & \text{se } c_1 < x < c_2, \\ (x - c_2)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & \text{se } x \geq c_2. \end{cases}$$

(i) Provare che $f_{c_1c_2}$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e risolve l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{1-\alpha}|y|^\alpha.$$

(ii) Cercare di ottenere tutte le soluzioni $f_{c_1c_2}$ mediante il metodo della separazione delle variabili.

(iii) Individuare tutte le (infinite) soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{1-\alpha}|y|^\alpha, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

e abbozzarne un grafico (si vede un pennello?). Il fatto che la soluzione di questo problema di Cauchy non sia unica contraddice qualche teorema noto di unicità?

(Nessuna contraddizione.)