FOGLIO 3

Esercizio (Il corno di Peano[1]) Sia $\Omega = [0,1[\times[0,1[$ e sia f la funzione di Ω in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } y \le x^3, \\ \frac{y \log y}{x \log x}, & \text{se } x^3 < y < x^2, \\ 2x, & \text{se } x^2 \le y, \end{cases}$$

per ogni $(x,y) \in \Omega$.

(i) Si vede un corno, una falce, una lunula?

(ii) Provare che f è una funzione continua su Ω e localmente Lipschitziana all'interno di Ω.

(iii) Mediante il metodo di separazione delle variabili, risolvere esplicitamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

nei seguenti tre casi: il caso $0 < x_0 < 1$, $y_0 = 0$, il caso $x_0 = y_0 = 0$, il caso $x_0 = 0$, $0 < y_0 < 1$.

(iv) Disegnare i grafici delle soluzioni trovate e indicare esplicitamente in quali dei tre casi la soluzione è unica. Vi è contraddizione rispetto a noti teoremi di esistenza e unicità?

(Nel primo caso la soluzione è $y(x) = x^3 - x_0^3$, $x \ge x_0$, nel secondo caso le soluzioni sono date da $y(x) = x^\alpha$, per ogni $\alpha \in [2,3]$, nel terzo caso la soluzione è $y(x) = x^2 + y_0$.)

Si noti la differenza con il classico Pennello di Peano dove le soluzioni hanno grafici che si intersecano a due a due in un opportuno segmento. Questo esempio, in un certo qual modo, è più forte del Pennello di Peano, in quanto le soluzioni nel caso $x_0 = y_0 = 0$ sono infinite e hanno grafici che si intersecano solo nell'origine (il punto $(1,1)$ è da noi escluso apriori).

Esercizio Risolvere l'equazione di Bernoulli

$$4y' = \cos x\, y + e^{\sin x} \log x\, y^{-3}. \tag{0.1}$$

Trovare anche una formula risolutiva per la più generale

$$\beta y' = \varphi'(x) y + e^{\varphi(x)} \psi'(x) y^{1-\beta}$$

ove $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \ne 0$ e φ, ψ sono due funzioni derivabili prefissate. Chi sono β, φ, ψ nella (0.1)?

[1] Questo nome me lo sono inventato....che sia meglio falce, lunula....altri suggerimenti? Lunula a dire il vero può essere ambiguo. Ad ogni modo, *horn shaped domains* sono di attuale interesse nella teoria degli spazi funzionali e già da qui si vedono gli aspetti patologici che possono presentare. Di questo mondo fanno parte cuspidi, spine, bilancieri, case con infinite stanze, mattoni sovrapposti....tutti *bad domains....*

(La soluzione della (0.1) soddisfa l'equazione $y^4 = e^{\sin x}(x \log x - x + c)$, per cui la scelta di c andrà fatta in modo che a secondo membro ci sia una funzione positiva: $c \geq 1$ va bene per ogni $x > 0$. Nel caso generale si ha $y^\beta(x) = e^{\varphi(x)}(\psi(x)+c)$.)

Esercizio Risolvere le seguenti equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine

(i) $y'' - (a+1)y' + ay = 0$

(ii) $y'' - 2by' - (a - b^2)y = 0$

ove $a, b \in \mathbb{R}$.

(Per la (i): $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{ax}$ se $a \neq 1$ e $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$ se $a = 1$. Per la (ii): $y(x) = c_1 e^{(b+\sqrt{a})x} + c_2 e^{(b-\sqrt{a})x}$ se $a > 0$, $y(x) = c_1 e^{bx} + c_2 x e^{bx}$ se $a = 0$, $y(x) = c_1 e^{bx} \cos(\sqrt{-a}x) + c_2 e^{bx} \sin(\sqrt{-a}x)$ se $a < 0$.)

Esercizio Risolvere le seguenti equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine superiore

(i) $y''' - (a+3)y'' + (3a+2)y' - 2ay = 0, \quad a \in \mathbb{R}$

(ii) $y^{(6)} - y'' = 0$.

(Per la (i): $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{ax}$ se $a \neq 1, 2$, $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^x$ se $a = 1$, $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$ se $a = 2$. Per la (ii): $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 e^x + c_5 \cos x + c_5 \sin x$.)