FOGLIO 4

Esercizio (Variazione delle costanti) Sia data l'equazione lineare non omogenea di ordine n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x) \tag{0.1}$$

e siano date n soluzioni $y_1, \ldots, y_n$ linearmente indipendenti per l'equazione omogenea associata

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0. \tag{0.2}$$

Si provi che se la funzione[1]

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x) \tag{0.3}$$

è una soluzione per l'equazione non omogenea (0.1) allora le derivate dei coefficienti $c_1, \ldots, c_n$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1' y_1 & + \cdots + c_n' y_n & = 0 \\ c_1' y_1' & + \cdots + c_n' y_n' & = 0 \\ \cdots & + \cdots + \cdots & = \cdots \\ \cdots & + \cdots + \cdots & = \cdots \\ \cdots & + \cdots + \cdots & = \cdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} & + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} & = 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} & + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} & = f \end{cases} \tag{0.4}$$

Traccia della soluzione. Dalla teoria è noto che per ciascun $j = 1, \ldots, n$ la funzione

$$z(x) = (y_j(x), y_j'(x) \ldots, y_j^{(n-1)}(x))$$

a valori in $\mathbb{R}^n$ soddisfa una equazione del primo ordine (un sistema) del tipo

$$z' = A(x)z.$$

Qui non importa chi sia la matrice A (anche se nota dalla teoria). Analogamente, la funzione $z(x) = (y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$, ottenuta a partire dalla soluzione y definita in (0.3), dovrà soddisfare l'equazione del primo ordine (il sistema)

$$z'(x) = A(x)z + b(x), \tag{0.5}$$

ove $b(x)$ è il vettore (pensato come vettore colonna) $b(x) = (0, \ldots, 0, f(x))$. Ciò significa che, detta $W(x)$ la matrice Wronskiana[2] associata alle soluzioni $y_1, \ldots, y_n$ e detto $c(x)$ il vettore (pensato come vettore colonna) $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$,

[1] Questa è una combinazione lineare delle soluzioni date. Se i coefficienti fossero costanti la funzione sarebbe ancora una soluzione dell'equazione omogenea e quindi non si avrebbe nulla di nuovo. L'idea è quindi di fare variare le costanti per ottenere una soluzione della non omogenea.....**da cui il nome di 'metodo della variazione delle costanti'**.

[2] Da Josef Maria Hoëné-Wronski, metafisico ottocentesco, inventore del *Prognomètre*.

la funzione $W(x)c(x)$ (vettore ottenuto come prodotto di matrice per vettore colonna) deve soddisfare l'equazione (0.5) ovvero

$$W'(x)c(x) + W(x)c'(x) = A(x)W(x)c + b(x).$$

Da questo tenendo conto che la matrice Wronskiana soddisfa

$$W'(x) = A(x)W(x),$$

deduciamo che

$$W(x)c'(x) = b(x)$$

che è il sistema voluto.

Esercizio Siano $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$ fissati. Si consideri l'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine

$$y'' - (2a+1)y' + a(a+1)y = e^{ax}(g'' - g'). \tag{0.6}$$

(i) Risolvere l'omogenea associata.

(ii) Immaginando una qualche familiarità si riesce a intuire quale potrebbe essere una soluzione particolare dell'equazione (0.6)? Se sì, provare a verificare che quanto intuito sia una soluzione.

(iii) Usando il metodo della variazione delle costanti descritto più sopra (cioè risolvendo il sistema (0.4) corrispondente) trovare una soluzione particolare della equazione (0.6).

(In questo caso non fornisco la risposta altrimenti disturbo l'immaginazione. La risposta sarà data nel foglio della prossima settimana.)

Esercizio Con il metodo della variazione delle costanti trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + y = \frac{2\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}, \quad x > 0. \tag{0.7}$$

Allo stesso modo risolvere la più generale

$$y'' + y = -2\sin x\, h' + \cos x\, h'', \quad x > 0, \tag{0.8}$$

dove h è una funzione di classe $C^2(0, +\infty)$ prefissata. Chi è h nella (0.7)?

(Per la prima una soluzione è per esempio $y(x) = -\log x \cos x$. Per la generale, $y(x) = h(x)\cos x$. Si noti come la scelta di una specifica funzione h, e allo stesso modo di una specifica funzione g nel precedente esercizio, potrebbe portare alla formulazione di equazioni differenziali a prima vista assai complicate.)

Esercizio Provare a ottenere una soluzione particolare delle equazioni (0.6), (0.8) nel caso $g(x) = x^2$, $h(x) = x$ procedendo per familiarità nel modo tradizionale. Chi ha voglia e tempo può allenarsi provando allo stesso modo anche con polinomi di grado superiore....il risultato è comunque noto....