FOGLIO 5

Esercizio Si ricordi la solita formula per la derivazione degli integrali dipendenti da parametro:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\alpha(x)} \eta(x,t)dt \quad = \quad \eta(x,\alpha(x))\alpha'(x) + \int_0^{\alpha(x)} \frac{d}{dx}\eta(x,t)dt.$$

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti[1] di ordine n non omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f.$$

Sia η una soluzione della omogenea associata tale che $\eta(0) = \eta'(0) = \cdots = \eta^{(n-2)} = 0$ e $\eta^{(n-1)}(0) = 1$. Applicando 'brutalmente' e ripetutamente la formula di cui sopra provare che la funzione

$$y(x) = \int_0^x \eta(x-t)f(t)dt$$

risolve l'equazione non omogenea data e valutare se applicare questa formula a equazioni precedentemente viste è più o meno facile dei metodi già usati[2].

Esercizio Risolvere per separazione delle variabili l'equazione

$$y' = y^2 \tag{0.1}$$

osservando che essa non gode di esistenza globale su $\mathbb{R}$.

Sia ora f una funzione strettamente positiva di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ di classe C^1 e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{0.2}$$

(i) Usando il Teorema del Confronto e confrontando con le soluzioni di (0.1) provare che in generale le soluzioni di (0.2) non sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si supponga che $x_0 = 0$ e $y_0 > 0$ e si provi che detto $]a,b[$ l'intervallo massimale di esistenza per la corrispondente soluzione di (0.2), si ha $b \leq 1/y_0$.

Esercizio Sia f una funzione di $\mathbb{R}$ in sè di classe C^1, monotona decrescente. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) - f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e si provi che gode di esistenza e unicità locale.

Sia ora y una fissata soluzione dell'equazione data e sia $\mathcal{I}$ il suo intervallo massimale di esistenza.

---

[1] Qui è cruciale che gli a_i siano costanti

[2] Dunque avete ben tre metodi per le non omogenee: il metodo naïve di familiarità, il metodo di variazione delle costanti nella sua versione più generale, e quest'ultimo con nucleo integrale η, che da un punto di vista teorico è riconducibile sempre alla variazione delle costanti

(i) Usando il Teorema del Confronto dire al più quante volte può il grafico di y intersecare la bisettrice del primo e terzo quadrante?

(ii) Mediante considerazioni sulla crescenza/decrescenza di y e un appropriato uso del Teorema della Fuga dai Compatti dire quante volte esattamente il grafico di y interseca la suddetta bisettrice nel caso $y_0 > x_0$.

(iii) Dedurre da (i), (ii) e da naturali considerazioni sulla crescenza/decrescenza di y che $\mathcal{I}$ è illimitato superiormente per ogni valore di x_0, y_0.

(iv) Provare che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ se f non è costante in alcun intorno di $+\infty$.

Esercizio Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolare autovalori e autovettori di A deducendo due soluzioni indipendenti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ del sistema differenziale

$$y'(x) = Ay(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Detta $B(x)$ la matrice 2×2 che ha come vettori colonna $y_1(x)$ e $y_2(x)$, ricordare che $B(x)$ definisce un risolvente per il sistema dato e utilizzando $B(x)$ determinare esplicitamente la matrice espondenziale e^{Ax}, $x \in \mathbb{R}$.

Risulta:

$y_1(x) = (-2e^x, e^x)$, $y_2(x) = (e^{4x}, e^{4x})$, $e^{Ax} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^x + e^{4x} & -2e^x + 2e^{4x} \\ -e^x + e^{4x} & e^x + 2e^{4x} \end{pmatrix}$