FOGLIO 7

Esercizio Sia $c > 0$. Nel piano euclideo (O, x, y) si consideri la circonferenza $\mathcal{C}_1$ di centro $(0, c)$ e raggio c, la circonferenza $\mathcal{C}_2$ di centro $(0, c/\sqrt{3})$ e raggio $c/\sqrt{3}$ e la circonferenza $\mathcal{C}_3$ di centro $(0, 0)$ e raggio c.

(i) Scrivere nelle coordinate polari standard (θ, ρ) le equazioni delle tre circonferenze e determinare $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$.

(ii) Detti C_1, C_2, C_3 i cerchi descritti dalle circonferenze $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ rispettivamente, rappresentare in coordinate polari l'interno A dell'insieme $C_1 \setminus (C_2 \cup C_3)$, ovvero rappresentare graficamente nel piano di coordinate (θ, ρ) l'insieme

$$\{(\theta, \rho) \in]0, 2\pi[\times]0, +\infty[: \ (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \in A\}$$

notando che esso è un dominio normale.

(iii) Mediante un cambio di coordinate polari calcolare

$$\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy.$$

(Risulta: $\mathcal{C}_1 : \rho = 2c \sin\theta$ con $\theta \in [0, \pi]$, $\mathcal{C}_2 : \rho = (2c/\sqrt{3}) \sin\theta$ con $\theta \in [0, \pi]$, $\mathcal{C}_3 : \rho = c$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. In coordinate polari (θ, ρ) risulta $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \{(\pi/6, c), (5\pi/6, c)\}$, $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{(\pi/3, c), (2\pi/3, c)\}$. Il dominio normale è dato da $\psi_1(\theta) < \rho < \psi_2(\theta)$ ove $\theta \in]\pi/6, 5\pi/6[$ e $\psi_2(\theta) = 2c \sin\theta$ per ogni $\theta \in]\pi/6, 5\pi/6[$ mentre $\psi_2(\theta) = c$ se $\theta \in]\pi/6, \pi/3] \cup [2\pi/3, 5\pi/6[$ e $\psi_2(\theta) = (2c/\sqrt{3}) \sin\theta$ se $\theta \in]\pi/3, 2\pi/3[$. L'integrale risulta $2c(\sqrt{3} - \pi/6 - 1/\sqrt{3})$.)

Esercizio Siano $R > 0$ e $0 < \alpha < \pi/2$. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > \tan(\pi/2 - \alpha)\sqrt{x^2 + y^2}\}$$

di apertura α e la semipalla $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \ z > 0\}$ di raggio R. Rappresentarli graficamente. Mediante coordinate sferiche calcolare il volume del cono sferico $C \cap P$, notando che esso non dipende linearmente dall'angolo α a differenza di un settore circolare del piano.

(Risulta: $(2/3)\pi R^3(1 - \cos\alpha)$.)

Esercizio Siano $R > 0$, $0 < d < R$. Rappresentare graficamente la calotta sferica $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \ z > d\}$ e usando coordinate cilindriche calcolarne il volume.

(Risulta: $\pi R^2(2R/3 - d) + \pi d^3/3$.)

Esercizo Si consideri nel piano euclideo il parallelogrammo $\mathcal{P}$ individuato dalle coppie di rette parallele r_1, s_1, e r_2, s_2 di equazioni

$$\begin{aligned}
r_1 &: \ a_1 x + b_1 y = c_1, \\
s_1 &: \ a_1 x + b_1 y = d_1, \\
r_2 &: \ a_2 x + b_2 y = c_2, \\
s_2 &: \ a_2 x + b_2 y = d_2,
\end{aligned}$$

ove $c_1 < d_1$ e $c_2 < d_2$.

(i) Dare condizioni sui coefficienti delle equazioni di cui sopra in modo che il parallelogrammo non sia degenere.

(ii) Scrivere esplicitamente un diffeomorfismo ϕ del piano che trasformi il parallelogrammo in un rettangolo.

(iii) Usando il cambio delle coordinate dato da ϕ, scrivere una formula per un integrale del tipo

$$\int_A f(x,y)dxdy$$

dove A è la regione di piano delimitata[1] dal parallelogrammo $\mathcal{P}$.

(iv) Pensare a una naturale generalizzazione a $\mathbb{R}^n$ degli argomenti di cui sopra. Le rette sarranno rimpiazzate da iperpiani (piani nello spazio tridimensionale), i rettangoli da pluri-intervalli (parallelepipedi nello spazio tridimensionale).

[1] Si capisce bene a chi ci stiamo riferendo.....ma a voler essere precisi bisognerebbe dire che A è quell'insieme aperto del piano che è limitato e la cui frontiera coincide con il parallelogrammo $\mathcal{P}$ dato