FOGLIO 8

Esercizio Si assuma che il tetto di un edificio sia descrivibile come varietà parametrica di dimensione due

$$\phi : D \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$$

ove D è un sottoinsieme aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ e ϕ è una funzione di classe C^1, immersiva, limitata con derivate limitate. Piovendo dentro[1], è necessario ricoprire il tetto con uno strato $S(\epsilon)$ di spessore $\epsilon > 0$ di resina impermeabilizzante. In maniera grossolana si può assumere che lo strato di resina sia descritto come segue

$$S(\epsilon) = \{\phi(u,v) + tN(u,v) : \ (u,v) \in D, 0 < t < \epsilon\}$$

ove N è il vettore normale unitario dato da[2]

$$N = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \barwedge \frac{\partial \phi}{\partial v}}{|\frac{\partial \phi}{\partial u} \barwedge \frac{\partial \phi}{\partial v}|}$$

(i) Sia Ψ la mappa da $D \times]0, \epsilon[$ a valori in $S(\epsilon)$ definita da

$$\Psi(u,v,t) = \phi(u,v) + tN(u,v)$$

per ogni $(u,v,t) \in D \times]0, \epsilon[$. Assumendo che Ψ sia un diffeomorfismo per ϵ sufficientemente piccolo, si osservi che il volume di $S(\epsilon)$ è dato da

$$\mathrm{Vol}(S(\epsilon)) = \int_{S(\epsilon)} 1 dxdydz = \int_0^{\epsilon} \int_D |\det D\Psi| dudvdt$$

(ii) È naturale pensare che l'area del tetto sia[3] $\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Vol}(S(\epsilon))/\epsilon$. Provare che in effetti vale

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathrm{Vol}(S(\epsilon))}{\epsilon} = \int_D \left| \frac{\partial \phi}{\partial u} \barwedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right| dudv.$$

(iii) Riflettere sul fatto che la formula appena trovata dà una motivazione concreta del motivo per cui ha senso definire $|\frac{\partial \phi}{\partial u} \barwedge \frac{\partial \phi}{\partial v}| dudv$ come elemento infinitesimo d'area.

(Suggerimento: non occorre scrivere esplicitamente il vettore N, basta lasciarlo indicato come $N = (N_1, N_2, N_3)$ e nel calcolo del limite si eliminino subito i termini del tipo $o(\epsilon)$ che risultano dal calcolo del volume.)

---

[1] Ogni riferimento a edifici realmente esistenti è volutamente casuale

[2] Si può assumere che N sia verso l'esterno dell'edificio, visto che la resina viene data per fuori....ma qui non conta. Per uniformità con il libro di testo, il simbolo $\barwedge$ viene qui usato per indicare il prodotto vettoriale più comunemente indicato con $\times$ o $\wedge$

[3] Dunque conoscere quanti litri di resina servono a impermeabilizzare il tetto dà una approssimazione dell'area del tetto

Esercizio Sia $R > 0$ fissato e sia $D =]0,\pi[\times]0,2\pi[$ e $\phi : D \to \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione (in coordinate sferiche[4]) della sfera di raggio R data da

$$\phi(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi),\ \forall\ (\varphi,\theta) \in D.$$

(i) Calcolare il vettore $\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \barwedge \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$ e osservare che esso ha la stessa direzione (come si poteva ampiamente prevedere) e verso (un pò meno prevedibile) del vettore $\phi(\varphi,\theta)$ che a sua volta ha la stessa direzione e verso della normale esterna. Concludere che la parametrizzazione ϕ orienta la sfera in modo coerente con la normale esterna.

(ii) Calcolare $|\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \barwedge \frac{\partial\phi}{\partial\theta}|$ deducendo che l'elemento infinitesimo di superficie è dato da

$$R^2 \sin\varphi d\varphi d\theta.$$

(iii) Dedurre che il flusso *uscente*[5] di un campo vettoriale $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ attraverso la sfera è dato da

$$\begin{aligned} R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} &[F_1(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)\sin\varphi\cos\theta \\ &F_2(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)\sin\varphi\sin\theta \\ &+F_3(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)\cos\varphi]\sin\varphi d\varphi\, d\theta \end{aligned}$$

(iv) Fare le stesse considerazioni di cui sopra per la circonferenza nel piano parametrizzata da $\phi(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $\theta \in]0,2\pi[$, nel qual caso l'elemento infinitesimo di lunghezza sarà dato da $Rd\theta$. Notare che questa parametrizzazione orienta la circonferenza in modo coerente alla normale esterna (e descrive la circonferenza 'percorrendola' in senso antiorario[6]).

Esercizio Sia $N \geqslant 2$. Si ricordi che la frontiera di un aperto di $\mathbb{R}^N$ è regolare se nell'intorno di ogni punto del bordo, l'aperto si lascia descrivere da una disuguaglianza del tipo $g(x_1,\dots,x_N) < 0$ dove g è di classe C^1 e sommersiva; si ricordi anche che la normale unitaria esterna è data dal gradiente normalizzato di g cioè $Dg/|Dg|$.

Sia ora $f : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e si consideri l'aperto $\Omega = \{(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N :\ x_N < f(x_1,\dots,x_{N-1})\}$, cioè il sottografico di f.

(i) Osservare che la frontiera di Ω è il grafico di f, cioè $\partial\Omega = \{(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N :\ x_N = f(x_1,\dots,x_{N-1})\}$, provare che $\partial\Omega$ è regolare individuando g come sopra e determinare la normale unitaria esterna ai punti della frontiera usando la funzione g.

(ii) Pensando la frontiera come varietà parametrica $N-1$ dimensionale data dalla mappa $F(x_1,\dots,x_{N-1}) = (x_1,\dots,x_{N-1}, f(x_1,\dots,x_{N-1}))$, determinare il vettore normale

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \barwedge \dots \barwedge \frac{\partial f}{\partial x_{N-1}},$$

[4] L'angolo φ rappresenta la coordinata zenitale (colatitudine), θ la coordinata azimutale (longitudine)

[5] Questa terminologia cara alla Fisica indica che il flusso è calcolato usando la normale esterna o - equivalentemente - usando una parametrizzazione che orienta la superficie coerentemente con la normale esterna.

[6] Questo è uno dei vari motivi per cui il senso di percorrenza antiorario viene universalmente detto 'positivo'.

normalizzarlo e confrontarlo con $Dg/|Dg|$ prima determinato. Ovviamente i due vettori avranno la stessa direzione. Hanno anche lo stesso verso?

(iii) Dire cosa cambia nel caso di un sopragrafico[7].

(Risposta: (ii) i due vettori differiscono per il fattore $(-1)^{N+1}$.)

Esercizio Si consideri nello spazio euclideo tridimensionale (O, x, y, z) la superficie bidimensionale parametrica toroidale ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse z di una circonferenza di raggio r e centro $(R, 0, 0)$ con $R > r$. Si parametrizzi tale superficie come segue:

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ y &= (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

per ogni $(\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[^2$. Fare un disegno.

(i) Determinare il vettore normale alla superficie ottenuto normalizzando il vettore

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\theta} \barwedge \frac{\partial(x, y, z)}{\partial\varphi}.$$

Tale vettore punta verso l'esterno o l'interno del toro? Si poteva trovare la normale uscente senza fare alcun conto?

(ii) Sia $F \equiv (v_1, v_2, v_3)$ un campo vettoriale costante. Si calcoli il flusso di F attraverso la superficie parametrica data usando la sola definizione di flusso. Si poteva prevedere il risultato senza fare alcun conto?

(iii) Sia $G(x, y, z) = (x, y, z)$ per ogni $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$. Usando il Teorema della Divergenza di Gauss, si calcoli il flusso uscente di G attraverso la superficie data.

(Risppsta: (i) punta verso l'esterno, (ii) risulta zero, (iii) risulta $6\pi^2 r^2 R$.)

[7]Detto anche epigrafico da chi apprezza il prefisso epi....lo stesso di epigrafe