

Programma svolto nel corso di Analisi Matematica Uno (seconda parte) per il corso di Laurea in Matematica nell'Anno Accademico 2008-2009

Tutti i seguenti argomenti sono stati trattati durante il corso e quindi fanno parte del programma d'esame. Si ricorda che il libro di testo cui ci si è riferiti costantemente durante il corso è 'Analisi Uno' di Giuseppe de Marco, Decibel Zanichelli, seconda edizione. Potrebbe essere talvolta utile allo studente consultare altri testi tra cui consigliamo: 'Principi di Analisi Matematica' di Walter Rudin, McGraw-Hill. Si ricorda che per gli esercizi il testo consigliato è "Esercizi di calcolo in una variabile" di Giuseppe De Marco e Carlo Mariconda ove lo studente può trovare innumerevoli esercizi risolti e utili alla preparazione all'esame scritto.

Serie numeriche reali e complesse. Definizione di serie di numeri reali o complessi, convergenza e divergenza. La serie geometrica. Il criterio di convergenza di Cauchy. Infinitesimità del termine generale di una serie convergente. La serie armonica. Assoluta convergenza di una serie. L'assoluta convergenza di una serie come condizione sufficiente per la convergenza. Serie a termini non-negativi. Il criterio del confronto. Il criterio del confronto asintotico. Il criterio della radice. Il criterio del rapporto. Il criterio di Leibniz. Serie di potenze. Il criterio di Cauchy-Hadamard. Il criterio di Abel Dirichlet (dimostrazione facoltativa). Somma e prodotto di serie, il Teorema di Mertens per il prodotto di serie (senza dimostrazione). Cenni ai riordinamenti. Esponenziale, seno e coseno di un numero complesso: definizioni, formule di Eulero, proprietà elementari.

Derivate. Definizione di derivata. Derivata destra e sinistra. Relazione tra derivabilità e continuità di una funzione. Derivate delle funzioni elementari. Derivata di somma, prodotto, reciproco e quoziente. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Diffeomorfismi. Derivate delle inverse delle funzioni circolari.

Teoremi classici del calcolo differenziale. Massimi e minimi locali e annullamento della derivata prima. Il Teorema di Rolle. Il Teorema di Lagrange. Relazione tra crescita e decrescita di una funzione e segno della derivata prima. Teorema degli incrementi finiti di Cauchy (senza dimostrazione). Regola di de L'Hôpital (dimostrazione solo nel caso $0/0$ con limite finito). Derivate successive, funzioni di classe C^m . Formula di Leibniz per la derivata m -esima del prodotto di due funzioni (senza dimostrazione). Confronto locale tra funzioni. Definizione di 'o piccolo'. Principio di sostituzione. Definizione di asintoticità. Funzioni dello stesso ordine. Definizione di 'O grande'. Punti di contatto di ordine superiore a m . Formula di Taylor con resto nella forma di Peano. Sviluppi asintotici delle funzioni elementari (senza dimostrazione). Formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange (senza dimostrazione). Serie di Taylor e definizione di funzione analitica. Un esempio di funzione derivabile infinite volte ma non analitica. Principio di identità per funzioni analitiche.

Varie. Massimi e minimi locali e derivate successive. Convessità: insiemi convessi e funzioni convesse. Caratterizzazione delle funzioni convesse in termini della crescita del rapporto incrementale. Convessità e derivata seconda. Cenni alla convessità stretta. Flessi di una funzione. Asintoti di una funzione. Grafici. Funzioni uniformemente continue. La continuità su un compatto implica la uniforme continuità. Teorema di estensione per funzioni uniformemente continue (solo enunciato). Funzioni Lipschitziane e Hölderiane.

Integrale secondo Riemann. Funzioni a scalino, funzioni caratteristiche. Integrale secondo Riemann di funzioni a scalino a supporto compatto. Integrale di Riemann di una funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} . Limitatezza del supporto e della funzione come condizioni necessarie

per l'integrabilità secondo Riemann di una funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} . Linearità e isotonia dell'integrale di Riemann (senza dimostrazione). Disuguaglianza tra modulo dell'integrale e integrale del modulo. Integrale esteso ad un intervallo. Integrabilità delle funzioni monotone. Integrabilità delle funzioni continue. Funzioni localmente integrabili secondo Riemann e la funzione integrale. Il Teorema di Torricelli. Primitive e integrali indefiniti di una funzione. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive di funzioni elementari. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Integrazione delle funzioni razionali: la formula di Hermite (senza dimostrazione). Il Teorema della media per gli integrali. Primitive di ordine superiore (senza dimostrazione). Formula di Taylor con resto integrale (senza dimostrazione).

Integrali generalizzati. Definizione di integrale generalizzato. Il criterio del confronto per la convergenza degli integrali generalizzati. Funzioni sommabili e integrabilità. Una funzione integrabile in senso generalizzato ma non sommabile. Il criterio di asintoticità per la convergenza degli integrali generalizzati. Il criterio dell'integrale per la convergenza di una serie. Il criterio di Abel Dirichlet per la convergenza di un integrale generalizzato.