Programma svolto nel corso di Analisi Matematica Uno per il corso di Laurea in Matematica nell'Anno Accademico 2009-2010

Tutti i seguenti argomenti sono stati trattati durante il corso (prima e seconda parte) e quindi fanno parte del programma d'esame. Si ricorda che il libro di testo cui ci si è riferiti costantemente durante il corso è "Analisi Uno" di Giuseppe De Marco, Decibel Zanichelli, seconda edizione. Potrebbe essere talvolta utile allo studente consultare altri testi tra cui consigliamo: "Principi di Analisi Matematica" di Walter Rudin, McGraw-Hill ed "Esplorando l'Analisi Matematica" di Paolo Toni e Pier Domenico Lamberti, SEI. Si ricorda che per gli esercizi il testo consigliato è "Esercizi di calcolo in una variabile" di Giuseppe De Marco e Carlo Mariconda ove lo studente può trovare innumerevoli esercizi risolti e utili alla preparazione all'esame scritto. Tutti i testi suddetti sono anche disponibili per la consultazione presso la biblioteca della Torre Archimede.

PRIMA PARTE (Victor Burenkov)

Numeri razionali e reali. Assiomi dei numeri reali. Esistenza dei numeri reali. Minimo e massimo di un insieme di numeri reali. Estremo inferiore e superiore di un insieme di numeri reali. Equivalenza tra completezza ordinale ed esistenza dell'estremo inferiore e superiore. Proprietà caratteristiche di sup ed inf. La completezza ordinale implica l'Archimedeità. Il principio di Cantor delle scatole cinesi. La disugualianza di Bernoulli. Definizione ed esistenza della radice n-esima. Definizione di x^α per numeri reali x ed α. Proprietà delle potenze. Definizioni e proprietà di esponenziali e logaritmi. Numerabilità dei razionali. Non numerabilità dei reali.

Limiti di successioni. Definizioni ed esempi. Proprietà dei limiti (unicità, limitatezza delle successioni convergenti, limiti di sottosuccessioni, passaggio al limite nelle disugualianze, permanenza del segno, teorema dei carabinieri). Proprietà degli infinitesimi. Operazioni con i limiti. Limiti di successioni monotone. La disugualianza aritmetico-geometrica. Numero e. Limiti notevoli. Criterio di convergenza di Cauchy. Limiti infiniti. Limiti di successioni di numeri complessi.

Limiti di funzioni. Definizioni equivalenti di limite di funzione reale di variabile reale. Limiti destri e sinistri. Limiti all'infinito. Limiti infiniti. Teoremi sui limiti. Limite della funzione composta. Cambiamento di variabile nei limiti. Limiti notevoli per funzioni. Limiti notevoli per le funzioni trigonometriche. Asintoticità e o-piccolo.

Continuità. Definizione ed esempi. Proprietà delle funzioni continue. Continuità di funzioni esponenziali, potenze, logaritmiche e trigonometriche. Proprietà delle funzioni continue su un intervallo chiuso. Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Continuità della funzione inversa. Limitatezza. Teorema di Weierstrass (minimi e massimi assoluti). Punti di discontinuità di prima specie e di seconda specie. Limite per le funzioni monotone.

Elementi di topologia puntuale. Insiemi aperti e chiusi di R. Spazi metrici. Esempi. Insiemi aperti e chiusi negli spazi metrici. Unioni ed intersezioni di insiemi aperti e chiusi. Limiti di successioni negli spazi metrici. Punti isolati e punti di accumulazione. Limiti di funzioni e continuità negli spazi metrici. Insiemi sequenzialmente compatti. Descrizione di insiemi sequenzialmente compatti in R^n. Imagine continua di un compatto. Proprietà di funzioni continue su compatti. Topologia e spazi topologici. Definizione. Esempi. Topologia indotta. Limiti e continuità negli spazi topologici. La topologia della retta estesa.

SECONDA PARTE (Pier Domenico Lamberti)

Serie numeriche reali e complesse. Definizione di serie di numeri reali o complessi, convergenza e divergenza. La serie geometrica. Il criterio di convergenza di Cauchy. Infinitesimità del termine generale di una serie convergente. La serie armonica. Assoluta convergenza di una serie. L'assoluta convergenza di una serie come condizione sufficiente per la convergenza. Serie a termini non-negativi. Il criterio del confronto. Il criterio del confronto asintotico. Il criterio della radice. Il criterio del rapporto. Il criterio di Leibniz. Serie di potenze. Raggio di convergenza di una serie di potenze. Il criterio di Cauchy-Hadamard. Il criterio di Abel Dirichlet (dimostrazione facoltativa). Somma e prodotto di serie, il Teorema di Mertens per il prodotto di serie (senza dimostrazione). Cenni ai riordinamenti. Esponenziale, seno e coseno di un numero complesso: definizioni, formule di Eulero, proprietà elementari.

Derivate. Definizione di derivata. Derivata destra e sinistra. Relazione tra derivabilità e continuità di una funzione. Derivate delle funzioni elementari. Derivata di somma, prodotto, reciproco e quoziente. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Diffeomorfismi. Derivate delle inverse delle funzioni circolari. Funzioni iperboliche (seno, coseno, tangente iperbolica), loro inverse (settoreseno, settorecoseno, settoretangente iperbolica) e corrispondenti derivate.

Teoremi classici del calcolo differenziale. Massimi e minimi locali e annullamento della derivata prima. Il Teorema di Rolle. Il Teorema di Lagrange. Relazione tra crescenza e decrescenza di una funzione e segno della derivata prima. Teorema degli incrementi finiti di Cauchy. Regola di de L'Hôpital (dimostrazione solo nel caso 0/0 con limite finito). Derivate successive, funzioni di classe C^m. Formula di Leibniz per la derivata m-esima del prodotto di due funzioni (senza dimostrazione). Confronto locale tra funzioni. Definizione di 'o piccolo'. Principio di sostituzione. Definizione di asintoticità. Funzioni dello stesso ordine. Definizione di 'O grande'. Punti di contatto di ordine superiore a m. Formula di Taylor con resto nella forma di Peano. Sviluppi asintotici delle funzioni elementari (senza dimostrazione). Formula di Talylor con resto nella forma di Lagrange (senza dimostrazione). Serie di Taylor e definizione di funzione analitica. Un esempio di funzione derivabile infinite volte ma non analitica. Principio di identità per funzioni analitiche.

Varie. Massimi e minimi locali e derivate successive. Convessità: insiemi convessi e funzioni convesse. Caratterizzazione delle funzioni convesse in termini della crescenza del rapporto incrementale. Convessità e derivata seconda. Cenni alla convessità stretta. Flessi di una funzione. Asintoti di una funzione. Grafici di funzione. Grafici di funzioni razionali mediante il solo uso della divisone euclidea, il passaggio per alcuni punti e la continuità (per questo si consulti "Esplorando l'Analisi Matematica" di Paolo Toni e Pier Domenico Lamberti, SEI, pagine 115-166). Funzioni uniformemente continue. La continuità su un compatto implica la uniforme continuità. Teorema di estensione per funzioni uniformemente continue (solo enunciato). Funzioni Lipschitziane e Hölderiane.

Integrale secondo Riemann. Funzioni a scalino, funzioni caratteristiche. Integrale secondo Riemann di funzioni a scalino a supporto compatto. Integrale di Riemann di una funzione di R in R. Limitatezza del supporto e della funzione come condizioni necessarie per l'integrabilità secondo Riemann di una funzione di R in R. Linearità e isotonia dell'integrale di Riemann (senza dimostrazione). Disuguaglianza tra modulo dell'integrale e integrale del modulo. Integrale esteso ad un intervallo. Integrabilità delle funzioni monotone. Integrabilità delle funzioni continue. Funzioni localmente integrabili secondo Riemann e la funzione integrale. Il Teorema di Torricelli. Primitive e integrali indefiniti di una funzione. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive di funzioni elementari. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali. Il Teorema della media per gli integrali. Primitive di ordine superiore (senza dimostrazione). Formula di Taylor con resto integrale.

Integrali generalizzati. Definizione di integrale generalizzato. Il criterio del confronto per la convergenza degli integrali generalizzati. Funzioni sommabili e integrabilità. Una funzione integrabile in senso generalizzato ma non sommabile. Il criterio di asintoticità per la convergenza degli integrali generalizzati. Il criterio dell’integrale per la convergenza di una serie.