Programma svolto nel corso di Analisi Funzionale 1

Anno Accademico 2017-2018

P.D. Lamberti

1. Operatori lineari e continui. Caratterizzazione degli operatori lineari e continui in spazi normati come operatori limitati, norma operatoriale, spazio degli operatori limitati e continui a valori in uno spazio di Banach e sua completezza; norme equivalenti, operatori in spazi di dimensione finita. Il Teorema di Hahn-Banach in forma analitica per spazi reali, estensione di operatori lineari e continui, caratterizzazione duale dei sottospazi densi di uno spazio normato, Il Teorema di Hahn-Banach per spazi complessi. Il Lemma di Baire. Il Teorema di Banach-Steinhaus. Spazi di successioni l^p, c_0, c, disuguaglianza di Jensen, descrizione esplicita dei duali di l^p con p finito, c_0 e c. Teorema della mappa aperta e corollari. Il Teorema del grafico chiuso. Supplementari topologici e proiezioni.

2. Topologie deboli. Motivazioni: il Lemma di Riesz e la non compattezza della palla unitaria chiusa in uno spazio infinito dimensionale. Topologie deboli associate a famiglie arbitrarie di funzioni a valori in spazi topologici. La topologia prodotto. Topologia debole in uno spazio normato, topologia debole e dimensione (in dimensione finita la topologia debole coincide con quella forte, in dimensione infinita gli aperti deboli sono illimitati, chiusura debole della sfera unitaria). Teorema di Hahn-Banach in forma geometrica (senza dimostrazione), i convessi chiusi sono debolmente chiusi, la topologia debole è di Hausdorff e definisce uno spazio vettoriale topologico. Convergenza debole e forte di successioni, continuità e continuità debole di operatori lineari. Le funzioni convesse inferiormente semicontinue sono debolmente inferiormente semicontinue. Convergenza debole di successioni negli spazi di successioni l^p, c_0, c. Topologia debole*. Il Teorema di Banach-Alaoglu. Spazi riflessivi, Lemmi di Helly e Goldstine, Teorema di Kakutani. Riflessività di uno spazio e del suo duale. Le funzioni convesse e inferiormente semicontinue su un convesso chiuso e limitato in uno spazio riflessivo ammettono punti di minimo. Spazi separabili, relazione tra la separabilità di uno spazio e quella del duale. Metrizzabilità della topologia debole* nella palla unitaria del duale di uno spazio separabile e conseguenze per le successioni limitate. Spazi uniformemente convessi e Teorema di Milman (senza dimostrazione), convergenza debole e della norma implica convergenza in norma.

3. Spazi funzionali. Spazi L^p, disuguaglianza di Clarkson (dimostrazione solo nel caso $p \geq 2$), uniforme convessità e riflessività di L^p per $p \neq 1, \infty$, non riflessività di L^1 e L^∞. Teorema di rappresentazione di Riesz per il duale di L^p con $p \neq \infty$ (nel caso $p = 1$ solo idea della dimostrazione). Separabilità di L^p con $p \neq \infty$ e non separabilità di L^∞. Richiami su compattezza e totale limitatezza in uno spazio metrico. Spazio $C^0(X)$ delle funzioni continue su uno spazio metrico, famiglie di funzioni equilimitate ed equicontinue, Teorema di Ascoli-Arzelà e caratterizzazione dei precompatti di $C^0(X)$ per X compatto. Teorema di Kolmogorov e caratterizzazione dei precompatti di $L^p(\mathbb{R}^N)$ (senza dimostrazione).

4. Spazi di Hilbert. Spazi con prodotto scalare, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, continuità del prodotto scalare, spazi di Hilbert, lo spazio pre-hilbertiano delle funzioni a quadrato sommabili secondo Riemann e lo spazio di Hilbert L^2. Identità del parallelogramma, e Teorema di Jordan-Neumann (cenni alla dimostrazione), uniforme convessità e riflessività di uno spazio di Hilbert. Teorema della proiezione su un convesso chiuso e caratterizzazione del punto di minima distanza mediante prodotti scalari, Lipschitzianità della proiezione. Proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso, insiemi ortogonali e Teorema delle proiezioni. Disuguaglianza di Bessel, convergenza di serie in spazi di Hilbert, basi Hilbertiane, Teorema di Fourier e identità di Parceval per basi numerabili. Esistenza di basi Hilbertiane. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, uno spazio di Hilbert è separabile se e solo se ammette una base Hilbertiana numerabile, cenni al problema di Banach sulle basi di Schauder negli spazi di Banach. Teorema di Fourier e identità di Parceval per basi non numerabli. Teorema di isometria di Riesz-Fischer. I teoremi di densità di Weierstrass e di Stone-Weierstrass (senza dimostrazione). Esempi di basi Hilbertiane, I polinomi di Legendre e la Formula di Rodrigues, I polinomi trigonometrici.

5. Operatori compatti e autoaggiunti. Teorema di rappresentazione di Riesz per il duale di uno spazio di Hilbert. Operatore aggiunto e operatori autoaggiunti in spazi di Hilbert. Operatori integrali di Fredholm e Volterra. Caratterizzazione degli operatori autoaggiunti in spazi complessi. Operatori compatti in spazi normati e loro caratterizzazione come operatori che mappano successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti. Chiusura dello spazio degli operatori compatti nello spazio degli operatori lineari e continui a valori in uno spazio di Banach, operatori di rango finito e cenni al problema dell'approssimazione di Grothendieck ed Enflo. Elementi di teoria spettrale, risolvente e spettro di un operatore, spettro puntuale. Lo spettro di un operatore lineare e continuo è compatto e non vuoto in $\mathbb{C}$. Teorema di Riesz-Schauder sulla struttura dello spettro di un operatore compatto in uno spazio di Banach (senza dimostrazione). Autovalori e autovettori di un operatore autoaggiunto. Teorema di Hilbert-Schmidt. Teorema dell'alternativa di Fredholm per operatori compatti e autoaggiunti.