

IL DELTOIDE DI STEINER : UN'IPOCICLOIDE A 3 CUSPIDI NELLA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

BENEDETTO SCIMEMI

Conversazione per la Mathesis Patavina il 29 Aprile 2017
testo da rivedere (ci può essere qualche errore nelle formule)

ABSTRACT. In cinematica, si chiama *ipocicloide a tre cuspidi* la curva descritta da un punto di un cerchio **B** di raggio r che rotola senza strisciare all'interno di un cerchio **A** di raggio $3r$. Nota fin dal Rinascimento, ristudiata da Eulero, questa curva ricomparve nell'800 nella *geometria del triangolo*, come involuppo della *retta di Simson*, e come tale fu chiamata il *deltoide di Steiner* in omaggio al grande geometra svizzero che l'aveva riconosciuta. In questa nota si spiega perché la genesi cinematica e quella che nasce dal triangolo non sono facilmente confrontabili: la difficoltà proviene sostanzialmente dal fatto che per identificarle occorre trisecare angoli, ciò che non può realizzarsi nell'ambito della tradizionale geometria della riga e compasso.

1. CICLOIDI, EPICICLOIDI, IPOCICLOIDI

In cinematica, si chiama *cicloide* la curva piana descritta da un punto D fissato sul bordo di un disco circolare **B** che si muove rotolando senza strisciare su un profilo rettilineo fisso **A**. La curva è ovviamente periodica: a ogni giro di **B** si genera un arco che si riproduce infinite volte, traslato nella direzione di **A** di una lunghezza pari alla circonferenza di **B**. Quando D tocca il profilo **A**, nella curva si forma una cuspide. *Cuspide*, nella definizione cinematica, è un punto in cui il punto mobile *rimbalza*, invertendo il verso del moto ma mantenendone la direzione. Nella Storia, la cicloide fu studiata da grandi matematici, da Nicola Cusano a Newton. Il nome le fu assegnato dal Galilei nel 1599 (era allora a Padova), il quale per l'area sottesa a un arco trovò empiricamente il valore $3\pi r^2$ (se il disco ha raggio r). A questo risultato, tuttavia, egli non diede credito, ritenendo quell'espressione troppo semplice. Più tardi questa formula fu invece dimostrata teoricamente dal Torricelli con il metodo degli *infinitesimi*, anticipatore del calcolo differenziale. La fama della cicloide è poi legata alle sue proprietà dinamiche, perché il suo profilo produce un pendolo rigorosamente isocrono e risolve il problema della *brachistocrona*, come provò Newton (1697).

Curve analoghe si ottengono se la retta si sostituisce con una circonferenza **A**; si parla allora di *epicicloide* se il cerchio mobile **B** rotola esternamente al cerchio fisso **A**, di *ipocicloide* se rotola internamente (cioè in una cavità circolare). Anche queste curve sono composte di archi che terminano in punti *cuspidali* e si riproducono periodicamente, eventualmente intrecciandosi. Se il rapporto tra i due raggi $n = \frac{r_A}{r_B}$ è intero, ed è il caso più interessante, si forma una curva non intrecciata che si chiude dopo n archi, collegati da n cuspidi. Il centro C_B di **B** descrive una circonferenza di raggio $r_A \pm r_B$ centrata nel centro C_A di **A**. La condizione *senza strisciare* si traduce nel fatto che, con riferimento a una qualunque direzione prefissata, quando

C_B si sposta ruotando attorno a C_A di un angolo θ (rivoluzione), il punto D ruota (rotazione) attorno a C_B di un angolo $n\theta$ nell'epicicloide, $-n\theta$ nell'ipocicloide. In entrambi i casi il punto D si avvicina e si allontana periodicamente da C_A : nelle epicicloidali la distanza va da un minimo r_A a un massimo $r_A + 2r_B$ e le n cuspidi, rivolte verso l'interno, corrispondono ai minimi; nelle ipocicloidali, la distanza $|C_A D|$ va da un minimo $r_A - 2r_B$ a un massimo r_A e le n cuspidi, rivolte verso l'esterno, corrispondono ai massimi. Tra due cuspidi successive la curva tocca (è tangente a) una circonferenza (non materiale) di raggio $r_A \pm 2r_B = r_B(n \pm 2)$.

2. EQUAZIONI

Per ottenere equazioni per queste curve, introduciamo un sistema cartesiano ortogonale con origine N nel centro C_A e asse x arbitrario. Detto θ l'anomalia del centro mobile C_B (angolo che il vettore $\vec{N}C_B$ forma con l'asse orientato delle x), le coordinate del punto D della curva si ottengono dalla somma vettoriale $\vec{C_A D} = \vec{C_A C_B} + \vec{C_B D}$. La rivoluzione e la rotazione si rappresentano, rispettivamente, con i vettori

$$\vec{C_A C_B} = (r_A \pm r_B)[\cos \theta, \sin \theta] \quad \vec{C_B D} = r_B[\cos(\pm n\theta), \sin(\pm n\theta)]$$

dove i segni \pm corrispondono, rispettivamente, all'epi- e all'ipo-cicloide. L'equazione vettoriale della curva descritta da D diventa

$$\vec{N D} = [(r_A \pm r_B) \cos \theta + r_B \cos(n\theta), (r_A \pm r_B) \sin \theta \pm r_B \sin(n\theta)].$$

o, più semplicemente, assumendo $r_B = 1, r_A = n$,

$$\vec{N D} = [(n \pm 1) \cos \theta + \cos(n\theta), (n \pm 1) \sin \theta \pm \sin(n\theta)].$$

Il seno e il coseno di $n\theta$ si possono scrivere come polinomi nelle grandezze $\cos \theta$ e $\sin \theta$, i quali si possono esprimere, a loro volta, come quozienti di polinomi nel parametro t mediante la tradizionale sostituzione $t = \tan \frac{\theta}{2}$. In definitiva, le coordinate del punto generico D si esprimono *razionalmente* nella variabile t . Si parla allora di curve *razionali*. Ne segue che si tratta di curve *algebriche*, cioè luoghi di punti che azzerano polinomi F in X, Y : per ottenere l'equazione *cartesiana* della curva, $F(X, Y) = 0$, occorre *eliminare* il parametro t ; ed è questo il passaggio che presenta le maggiori difficoltà di calcolo. Come metodo generale si può usare la teoria del *risultante*, un'espressione polinomiale opportunamente costruita (da Frobenius) a partire dai coefficienti di due polinomi assegnati. Il risultante gode della proprietà di annullarsi se i due polinomi di partenza hanno zeri comuni. Se $\vec{N D} = [\frac{f_x(t)}{g_x(t)}, \frac{f_y(t)}{g_y(t)}]$, dove f_x, g_x, f_y, g_y sono polinomi in t , imponendo che sia nullo il risultante dei due polinomi in t : $Xg_x(t) - f_x(t)$ e $Yg_y(t) - f_y(t)$, si ottiene, appunto, il polinomio $F(X, Y)$. Poiché il risultante è definito come determinante di una matrice il cui ordine può essere elevato (e cresce con n), il calcolo può essere lungo e complicato. Torna allora molto utile il software *Mathematica*, che possiede il comando diretto *Resultant[f(t), g(t), t]*. Non c'è nel software un comando che produca coseno e seno di $n\theta$ in funzione del coseno e seno di θ ; ma si tratta di espressioni polinomiali che si ricavano facilmente, per esempio, separando reale e immaginario nella potenza del binomio complesso $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$ (formula di Eulero-LeMoivre).

3. ESEMPI - FIGURA 1

EPICICLOIDI

$n = 1$.

Un disco di raggio 1 rotola senza strisciare sul bordo di un disco fisso di raggio 1.

$D = [2 \cos \theta + \cos 2\theta, 2 \sin \theta + \sin 2\theta]$. Con le formule

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{(-1-2t+t^2)(-1+2t+t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \quad \text{si ottiene } D = \frac{1}{(1+t^2)^2} [3 - 6t^2 - t^4, 8t].$$

Eliminando t si trova l'equazione cartesiana della *cardioide*:

$$(X^2 + Y^2)^2 - 6(X^2 + Y^2) - 8X - 3 = 0.$$

L'unica cuspidè è il punto $[-1, 0]$. Il calcolo dell'area porta a 6π , sei volte quella del cerchio iscritto. La lunghezza è 16, otto dei suoi diametri.

$n = 2$

Un disco rotola senza strisciare sul bordo di un disco fisso di raggio doppio.

$$D = [3 \cos \theta + \cos 3\theta, 3 \sin \theta + \sin 3\theta].$$

Calcolando seno e coseno di 3θ , con lo stesso procedimento si perviene all'equazione cartesiana della *nefroide*: $(X^2 + Y^2)^3 - 12(X^2 + Y^2)^2 - 60X^2 + 48Y^2 - 64 = 0$.

Si vede la simmetria rispetto all'asse x . Le due cuspidi sono $[4, 0]$ e $[-4, 0]$. L'area è 12π , la lunghezza 24.

IPOCICLOIDI

$n = 2$

Un disco di raggio 1 rotola senza strisciare in una cavità circolare di raggio 2.

Il punto $D = [2 \cos \theta, 0]$ descrive un segmento (avanti e indietro) ¹ Le due cuspidi sono $[2, 0]$ e $[-2, 0]$, gli estremi del segmento.

$n = 3$

Un disco di raggio 1 rotola senza strisciare in una cavità circolare di raggio 3.

$$D = [2 \cos \theta + \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta] = \frac{1}{(1+t^2)^2} [3 - 6t^2 - 8t^4, 8t^3]$$

Eliminando t si trova l'equazione cartesiana del *deltoidè*:

$$-27 + 8X(3Y^2 - X^2) + 18(X^2 + Y^2) + (X^2 + Y^2)^2 = 0.$$

Le tre cuspidi sono $[3, 0]$, $[-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$, $[-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$. L'area è 2π , la lunghezza è 16.

Questa è la curva che ci interessa, quella che si incontra nei fondamentali lavori di Steiner del 1847 sulla *Geometria del Triangolo*. Molto prima, la stessa curva era comparsa in altri vari contesti (per esempio nell' *Ottica* di Newton, nello studio delle curve cosiddette *caustiche*).

¹Il corrispondente dispositivo meccanico, che trasforma il moto da circolare a rettilineo, era noto agli Arabi ed è riportato da Girolamo Cardano.

4. L'EPICICLOIDE A TRE CUSPIDI - FIGURA 2

L'equazione cartesiana non dà facili informazioni sulla sua forma, salvo un'evidente simmetria rispetto all'asse X , su cui infatti si trova una delle tre cuspidi. Più utile è derivare dalle equazioni in θ la relazione $\rho^2 = X^2 + Y^2 = 5 - 4 \cos 3\theta$, che però non è un'equazione in coordinate polari, perché θ non è l'anomalia del punto D . Ma qui si vedono i tre assi di simmetria e si verifica che per i valori $\theta = k\frac{\pi}{3}, k = 0, 1, 2, \dots$ la distanza dall'origine passa tre volte da un minimo 1 a un massimo 3, come già detto.

Ai fini di sviluppi successivi, ci interessa studiare la retta $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\theta$ tangente alla curva nel suo punto generico $D = D_\theta = [2 \cos \theta + \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta]$. Si tratta della retta che unisce D al punto $Q = Q_\theta = \frac{1}{2}(C_A + C_B) = [\cos \theta, \sin \theta]$. Si può dimostrarlo con la derivazione, ma è più istruttivo ricorrere alla genesi cinematica: per effetto della condizione *senza strisciare*, il moto di D , rispetto al riferimento fisso, è una rotazione attorno al punto in cui i due cerchi **A** e **B** si toccano. Questo punto (il centro *istantaneo* di rotazione) è $C = 3[\cos \theta, \sin \theta]$. Poichè i segmenti QD e CD sono ortogonali (dato che Q, C sono diametralmente opposti sul cerchio mobile) la direzione del moto infinitesimo di D , cioè la direzione della tangente, è quella di QD . Se $Z = [X, Y]$, l'equazione in X, Y della tangente alla curva in D si ottiene dunque annullando il prodotto scalare $(Z - Q) \cdot (C - D) = (X - \cos \theta)(3 \cos \theta - (2 \cos \theta + \cos 2\theta)) + (Y - \sin \theta)(3 \sin \theta - (2 \sin \theta - \sin 2\theta)) = -1 + \cos 3\theta + X(\cos \theta - \cos 2\theta) + Y(\sin \theta + \sin 2\theta)$. Con le formule di bisezione si vede che la pendenza è $-\frac{\cos \theta - \cos 2\theta}{\sin \theta + \sin 2\theta} = -\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} = -\tan \frac{\theta}{2}$.

Razionalizzando nel solito modo, con il parametro $t = \tan \frac{\theta}{2}$, si trova che l'equazione della tangente nel punto $D = D_t$ è semplicemente

$$\mathbf{t}_t: -3t + t^3 + tX + t^3X + Y + t^2Y = 0, \quad \text{la cui pendenza è infatti } -t.$$

Riassumendo: la tangente alla curva nel punto $D_\theta = [2 \cos \theta + \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta]$ è la retta per $Q_\theta = [\cos \theta, \sin \theta]$ che ha pendenza $-\tan \frac{\theta}{2}$.

In particolare, la tangente in una delle tre cuspidi è ovviamente l'asse x ; le tangenti nelle altre due cuspidi hanno pendenza $\pm\sqrt{3}$. Queste sono anche assi della simmetria ternaria e sono le uniche tre tangenti alla curva che passano per l'origine.² Osserviamo inoltre che, poichè DC e DQ sono ortogonali, il punto D di tangenza sulla curva è la proiezione ortogonale di C sulla tangente.

La determinazione della lunghezza e quella dell'area racchiusa dalla curva sono notevoli esercizi di calcolo differenziale; i primi calcoli sembrano complicati, ma i risultati finali sono espressioni semplicissime.

Per l'area occorre triplicare l'integrale definito, per t da 0 a $\sqrt{3}$, della forma differenziale $x dy - y dx = \frac{4t^2(-3+t^2)^2}{(1+t^2)^4} dt$. La primitiva è $2 \frac{-3t+10t^3-3t^5}{3(1+t^2)^3} + 2 \operatorname{artan}[t]$. Negli estremi di integrazione il primo addendo è nullo e il secondo vale rispettivamente 0 e $\frac{2\pi}{3}$. Così per l'area complessiva della curva chiusa si ottiene 2π , di cui dunque una metà è interna e l'altra metà esterna al cerchio internamente tangente.

Quanto alla lunghezza, integrando la funzione $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ si trova la primitiva $-\frac{8(-1+3t^2)}{3(1+t^2)^{3/2}}$ e il risultato finale è semplicemente 16, otto volte il diametro di quel cerchio.

²Per riconoscere le cuspidi e le loro tangenti si potrebbe anche studiare la derivata $\frac{d}{dt} D_t = \frac{8t(-3+t^2)}{(1+t^2)^3} [1, -t]$

5. GEOMETRIA DEL TRIANGOLO. USO DEGLI ANGOLI ORIENTATI TRA RETTE.
TRIANGOLO PEDALE E RETTA DI SIMSON - FIGURA 3

L'angolo orientato tra rette due rette, che indicheremo con $\langle r, s$ ovvero $\langle AB, CD$ o più spesso, coinvolgendo l'intersezione, $\langle AB, BC = \langle ABC$, è uno strumento molto utile nelle questioni di geometria elementare. Questi angoli vanno misurati modulo π , e quindi l'algebra di queste grandezze richiede un po' di accortezza. Per esempio, il fatto che in un triangolo la somma degli angoli elementari vale π produce l'utile identità $\langle ABC = \langle BAC + \langle ACB$. L'uso di queste grandezze ha due impagabili pregi: consente di scrivere in modo sintetico l'equazione $\langle AXB = 0$ per la retta AB e l'equazione $\langle AXB = \langle ACB$ per il cerchio (ABC) circoscritto al triangolo $\triangle ABC$. Con riferimento alle trasformazioni geometriche, quelle pari (rotazioni, traslazioni, omotetie) conservano questi angoli, le dispari (riflessioni) li trasformano nell'opposto $-\langle ABC = \langle CBA$.

Con questo strumento molte dimostrazioni diventano immediate e quasi meccaniche. Per esempio

Lemma 5.1. *In un triangolo $\mathbf{A} = \triangle A_1 A_2 A_3$ il riflesso H^i dell'ortocentro H sul lato $A_j A_h$ appartiene al circocercchio $(A_1 A_2 A_3)$.*

Proof. Applicando una riflessione sul lato $A_1 A_2$ abbiamo: $\langle A_1 H^3 A_2 = -\langle A_1 H A_2 = \langle A_2 H, A_1 H = \langle A_1 A_3, A_2 A_3 = \langle A_1 A_3 A_2$, e analogamente per gli altri indici. \square

Assegnato $\mathbf{A} = \triangle A_1 A_2 A_3$ e un punto qualunque P , si chiama *pedale* di P su \mathbf{A} il triangolo che ha per vertici le proiezioni ortogonali P_i di P sui lati di \mathbf{A} : $P_i \in A_j A_h, PP_i \perp A_j A_h$.

Lemma 5.2. *Gli angoli (tra i lati) del triangolo pedale $P_1 P_2 P_3$ sono legati a quelli di \mathbf{A} dalla relazione $\langle A_i P A_j = \langle A_i A_h A_j + \langle P_i P_h P_j$.*

Proof. Considerati i cerchi $(P_1 P P_3) \ni A_2, (P_2 P P_3) \ni A_3$, calcoliamo, per esempio $\langle P_2 P_3 P_1 = \langle P_2 P_3 P + \langle P P_3 P_1 = \langle P_2 A_1 P + \langle P A_2 P_1 = \langle A_3 A_1 P + \langle P A_2 A_3 = \langle A_3 P A_1 + \langle A_1 A_3 P + \langle A_2 P A_3 + \langle P A_3 A_2 = \langle A_1 A_3 A_2 + \langle A_2 P A_1$. \square

Ne segue che $\langle P_2 P_3 P_1 = 0$ equivale a $\langle A_1 P A_2 = \langle A_1 A_3 A_2$, cioè il

Corollary 5.3. *Le proiezioni ortogonali di un punto P sui lati di un triangolo sono allineate (ovvero: il triangolo pedale di P degenera) se e solo se P appartiene al circocercchio.*

La retta s_P di allineamento dei piedi P_i si chiama la *retta di Simson* del punto P . Ad essa si associa talvolta anche il nome di Wallace, che dimostrò questo allineamento nel 1797. Nel 1857 Jacob Steiner enunciò un risultato che poi divenne famoso: al variare di P sul circocercchio, le rette di Simson s_P descrivono una famiglia il cui involuppo è un'epicicloide a tre cuspidi. Steiner si limitò a pubblicarne l'enunciato; varie dimostrazioni furono in seguito prodotte, con metodi diversi, da grandi geometri (tra cui Cremona, nel 1864). Nella letteratura se ne trovano infatti varie versioni, nessuna delle quali, tuttavia, si può dire molto facile. Per esempio, la parte ad essa dedicate nel ricchissimo libro di Heinrich Dörrie *100 great problems of Elementary Mathematics* (Dover, 1965) consiste di 4 pagine di formule trigonometriche, tra le più ostiche dell'intero volume. Anche un'ingegnosa riduzione al caso che il triangolo sia equilatero, dovuta a M. de Guzman (*Racsam*, vol.95, p.57-64, 2001) non è di facile lettura (se non altro per motivi tipografici). Qui prenderemo una strada diversa, che ci condurrà anche a qualche risultato aggiuntivo.

6. SVILUPPI POCO NOTI: DIREZIONI TERNARIE DI UN TRIANGOLO

Informazioni più precise sulla retta di Simson si ottengono se, anziché considerare i piedi P_i , si guarda ai riflessi P^i di P sui lati. Poichè $P_i = \frac{P+P^i}{2}$, c'è un'omotetia di centro P e fattore 2, sia $\eta_{P,2} : P_i \rightarrow P^i$, che trasforma la retta di Simson s_P in una retta parallela r_P su cui sono allineati i P^i . Ma una notevole proprietà aggiuntiva è il

Lemma 6.1. *I riflessi di un punto P del circocercchio sui lati del triangolo sono allineati su una retta r_P che passa per l'ortocentro.*

Proof. Siano P^1, P^2 i riflessi di un punto P del circocercchio rispettivamente sui lati A_2A_3, A_1A_3 . Applicando ulteriori riflessioni su quei lati, calcoliamo $\langle P^1HP^3 = \langle P^1HA_3 + \langle A_3HP^3 = \langle PH^1A_3 + \langle A_3H^2P = 0$ dato che, per il Lemma precedente, i punti H^1, H^2 stanno entrambi sul circocercchio, e dunque $\langle A_3H^2P = \langle A_3H^1P$. \square

Ne segue, in particolare, che la retta di Simson s_P passa per il punto medio $\frac{P+H}{2}$. Il seguente enunciato starà alla base della nostra dimostrazione del teorema di Steiner:

Theorem 6.2. *Sia $\mathbf{A} = A_1A_2A_3$ un triangolo, $\mathbf{C} = (A_1A_2A_3)$ il cerchio circoscritto, O il circocentro, H l'ortocentro. Se P è un punto di \mathbf{C} , sia r_P la retta cui appartengono i riflessi di P sui lati di \mathbf{A} .*

La corrispondenza $P \rightarrow r_P$ è una biiezione tra (i punti di) \mathbf{C} e (le rette de) il fascio per H : quando P si sposta ruotando di un angolo θ sul circocercchio \mathbf{C} (attorno a O), la retta corrispondente r_P ruota di un angolo $-\theta/2$ (quindi nel verso opposto) nel fascio di H .

Proof. Siano P, Q punti del circocercchio, P^i, Q^i i loro riflessi sul lato A_jA_h . Risulta $\langle OP, OQ = \langle POQ = 2\langle PH^iQ = -2\langle P^iHQ^1 = -2\langle HP^i, H^i = -2\langle r_P, r_Q$. \square

Più precisamente, i vettori \vec{OP}, \vec{OQ} formano un angolo (modulo 2π) doppio dell'opposto dell'angolo (modulo π) tra le rette r_P e r_Q .³

Una prima conseguenza di questo enunciato è l'esistenza di tre punti V sul circocercchio per cui sono paralleli il raggio OV e la retta r_V e quindi anche la retta di Simson s_V (s_P , si ricordi, è la parallela a r_P che passa per il punto $\frac{P+H}{2}$). Questi tre raggi-vettori \vec{OV} si ottengono l'uno dall'altro mediante rotazioni di ampiezza $\pm \frac{2\pi}{3}$. In corrispondenza, nel fascio di H si hanno tre rette r_V , parallele a quei vettori, che si ottengono l'una dall'altra con rotazioni di ampiezza $\pm \frac{\pi}{3}$.⁴ Questo suggerisce la seguente

³In questo enunciato si tocca con mano una delle maggiori difficoltà che si incontrano nell'uso degli angoli in geometria elementare: le misure degli angoli tra rette e le misure degli angoli tra vettori non sono grandezze omogenee (un analogo caso è il notissimo legame tra angoli al centro e angoli alla circonferenza).

⁴Ecco un modo equivalente di vedere la situazione: nel piano complesso, sul cerchio unitario si considerino i numeri z e z^{-2} : essi coincidono per tre valori di z , che sono le tre radici cubiche dell'unità. La moltiplicazione per un numero complesso a di modulo 1 non cambia la sostanza: az e az^{-2} coincidono per tre valori di z che si ottengono l'uno dall'altro con rotazioni $\pm \frac{\pi}{3}$.

Definition 6.3. *Le direzioni ternarie di un triangolo sono quelle dei tre raggi-vettori \vec{OV} (O circocentro, V sul circocentro) paralleli alle corrispondenti rette di Simson s_V .*

Si tratta di direzioni orientate. Sia \vec{OV} uno di questi raggi-vettori, v una retta parallela. Per definizione, per ogni P (sul circocentro) risulta $\langle \vec{OV}, \vec{OP} \rangle = -2\langle v, s_P \rangle$. In particolare, se P è un vertice A_i e per v si sceglie una retta v_i che passa per A_i , la sua retta di Simson è un'altezza: $s_{A_i} = HA_i = h_i$, quindi risulta $\langle \vec{OV}, \vec{OA_i} \rangle = -2\langle OH, s_{A_i} \rangle = -2\langle v_i, h_i \rangle$. In altre parole, una direzione ternaria forma con il raggio OA_i un angolo opposto del doppio di quello che essa forma con l'altezza per A_i . Questo equivale a dire che la retta v_i *triseca* l'angolo $\langle HA_iO \rangle$, precisando : un terzo dell'angolo dalla parte di H , due terzi da quella di O . Poichè le trisettrici v_i formano tra loro angoli (elementari) eguali, si creano triangoli equilateri *circoscritti* a \mathbf{A} ⁵.

Introduciamo ora un riferimento particolare: il centro sia O e l'asse delle x positive abbia una delle direzioni ternarie: $\vec{OU} = [1, 0]$. Se indichiamo con ϕ l'anomalia del punto P sul circocentro, la retta di Simson s_P ha pendenza $-\tan(\frac{\phi}{2})$. In particolare, se ϕ_i è l'anomalia del vertice A_i , il punto medio $M_i = \frac{A_j + A_h}{2}$ ha anomalia $\frac{\phi_j + \phi_h}{2}$. Poichè risulta $H\vec{A_i} = -2O\vec{M_i}$ (nel prossimo paragrafo ritroveremo l'omotetia $\eta_{G, -\frac{1}{2}} : H \rightarrow O$), la relazione provata nel teorema principale si legge $\phi_i = \langle \vec{OU}, \vec{OP_i} \rangle = -2\langle \vec{OU}, H\vec{A_i} \rangle = -2\frac{\phi_j + \phi_h}{2}$ e dunque $\Sigma\phi_i = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$ modulo 2π . Si conclude con il

Corollary 6.4. *In un riferimento con l'origine nel circocentro del triangolo, se l'asse delle x positive ha una delle direzioni ternarie, la somma delle anomalie dei vertici è un multiplo intero di 2π .*

La nozione di *direzione ternaria* si può affrancare dalla scelta del riferimento. Infatti, scegliendo un nuovo riferimento, con l'asse x' arbitrario che formi con il precedente un angolo $\delta = \langle \vec{OU}, \vec{OU'} \rangle$, per le nuove anomalie si ha $\phi'_i = \phi_i + \delta$ e dunque $\Sigma\phi'_i = 3\delta$, cioè $\delta = \frac{1}{3}\Sigma\phi'_i$ modulo $\frac{2\pi}{3}$. Così, pur di usare la dovuta cautela per l'uso non tradizionale di sommare direzioni (intendendo *anomalie*) possiamo adottare la

Definition 6.5. *Le direzioni ternarie di un triangolo $\mathbf{A} = A_1A_2A_3$ di circocentro O sono le (tre) medie aritmetiche delle direzioni dei raggi-vettori $O\vec{A_i}$.*

Questa nozione, che qui è stata suggerita dalla retta di Simson, torna peraltro utile in altri capitoli della geometria del triangolo, soprattutto nella trattazione analitica, come si vedrà. La sua scarsa popolarità dipende, probabilmente, dal fatto che la trisezione degli angoli non è strumento della tradizionale geometria elementare.

7. UN CLASSICO: IL CERCHIO DEI NOVE PUNTI - FIGURA 4

In un triangolo si generano naturalmente due omotetie: una prima omotetia, di centro H e coefficiente $\frac{1}{2}$, sia $\eta_{H, \frac{1}{2}} : A_i \rightarrow H_i$, esprime il fatto che il piede H_i

⁵Si intende qui che i vertici A_i appartengono alle rette v_i , non che \mathbf{A} sia necessariamente interno a questi triangoli. La situazione richiama quella del famoso *triangolo di Morley*, che infatti - si può dimostrarlo - è omotetico a questi triangoli circoscritti.

dell'altezza per A_i è il punto medio $\frac{H+H^i}{2}$ tra l'ortocentro e il suo riflesso H^i sul lato $A_j A_h$. Poichè sappiamo (Lemma) che i punti H^i stanno sul circocerchio \mathbf{C} di \mathbf{A} , ne deduciamo che i piedi H_i appartengono a un cerchio \mathbf{N} , immagine di \mathbf{C} secondo $\eta_{H, \frac{1}{2}}$, un cerchio di centro $N = \frac{H+O}{2}$ e raggio $\frac{R}{2}$, se R è il raggio di \mathbf{C} . Su \mathbf{N} si trovano naturalmente, anche i punti medi $K_i = \frac{H+A_i}{2}$ tra ortocentro e vertici.

Un'altra omotetia (Talete), $\eta_{G, -\frac{1}{2}} : A_i \rightarrow M_i$, esprime il fatto che il baricentro G sta a un terzo della mediana $A_i M_i$. Questa omotetia trasforma le altezze di \mathbf{A} nelle altezze del triangolo *mediale* $\mathbf{M} = \triangle M_1 M_2 M_3$, che sono poi gli assi (dei lati) di \mathbf{A} . Passando alle loro intersezioni di queste rette, si trova la relazione vettoriale $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$ che allinea i tre punti *notevoli* H, G, O sulla famosa *retta di Eulero*. Consideriamo ora l'immagine di \mathbf{C} secondo $\eta_{G, -\frac{1}{2}}$. E' un cerchio di raggio $\frac{R}{2}$ con centro in $\frac{O+G}{2}$. Per effetto dell'ultima equazione, questo centro è di nuovo $N = \frac{H+O}{2}$. Si tratta perciò dello stesso cerchio \mathbf{N} . Abbiamo così dimostrato un altro famoso risultato:

Theorem 7.1. (Poncelet) *In un triangolo $\mathbf{A} = \triangle A_1 A_2 A_3$ di circocentro O e ortocentro H i punti medi dei lati $M_i = \frac{A_j + A_h}{2}$, i piedi H_i delle altezze e i punti medi $K_i = \frac{H+A_i}{2}$ appartengono a uno stesso cerchio \mathbf{N} , detto cerchio dei nove punti di \mathbf{A} . Il centro di \mathbf{N} è il punto medio $N = \frac{O+H}{2}$: il raggio di \mathbf{N} è la metà del circoraggio di \mathbf{A} .*

\mathbf{N} è detto anche *novecerchio* o cerchio di *Feuerbach* di \mathbf{A} ⁶. Il suo centro N si dice talvolta *novecentro* di \mathbf{A} .

Vogliamo ora caratterizzare le direzioni ternarie coinvolgendo il novecentro N . Abbiamo visto che per ogni P sul circocerchio il punto medio $\frac{P+H}{2}$ appartiene alla retta di Simson s_P . Allora (Talete) \vec{OV} e s_V sono paralleli se e solo se $N (= \frac{O+H}{2})$ appartiene a s_V . Otteniamo così una definizione equivalente:

Definition 7.2. *Se O, N sono il circocentro e il novecentro di un triangolo \mathbf{A} , le direzioni ternarie di \mathbf{A} sono quelle dei raggi-vettori \vec{OV} (V sul circocerchio) per cui la retta di Simson s_V passa per N .*

8. DIMOSTRAZIONE SINTETICA DEL TEOREMA DI STEINER- FIGURA 5

L'idea è quella di ripercorrere la genesi cinematica dell'ipocicloide scegliendo opportunamente - in funzione del triangolo - il cerchio fisso \mathbf{C}_A e gli assi di simmetria, per poi verificare che le tangenti alla curva sono proprio le rette di Simson.

Assegnato $\mathbf{A} = \triangle A_1 A_2 A_3$, si consideri il suo cerchio dei nove punti \mathbf{N} e sia U un suo punto, tale che \vec{NU} abbia una delle direzioni ternarie di \mathbf{A} . Introdotto il sistema di coordinate di centro N e punto unitario $U = [1, 0]$, sia $\theta = \theta_Q$ l'anomalia di $Q = [\cos \theta, \sin \theta]$, punto generico di \mathbf{N} . Si proceda come nella trattazione cinematica, facendo ruotare senza strisciare un disco di raggio $1 = |NU|$ in una cavità circolare di centro N e raggio 3. Introdotto il punto $R = [\cos 2\theta, -\sin 2\theta]$, se $\vec{ND} = 2\vec{NQ} + \vec{NR}$, il punto D , per definizione, descrive, al variare di θ , un'ipocicloide Δ che ha centro in N e tre cuspidi, di cui una è $[3, 0]$. Abbiamo

⁶Quando il prof. Edmondo Morgantini, che era stato Presidente per molti anni della nostra Mathesis, si ritirò per il pensionamento, sulla lavagna nel suo studio rimase a lungo un bel disegno, da lui prodotto con gessi colorati, raffigurante il cerchio dei nove punti e le sue proprietà, tra cui spicca la tangenza ai 4 cerchi tritangenti, un teorema di Feuerbach.

anche visto che $\mathbf{t} = \mathbf{t}_D$, la tangente a Δ nel punto D , è la retta passante per Q che forma con \vec{NU} l'angolo $-\frac{\theta}{2}$.

Spostiamoci ora sul circocerkio \mathbf{C} di \mathbf{A} per introdurre la retta di Simson. Con l'omotetia $\eta_{H,2} : Q \rightarrow P$ passiamo dal punto generico Q di \mathbf{N} al punto (generico) P di \mathbf{C} . Costruiamone la retta di Simson s_P . Per quanto visto, s_P passa per $Q = \frac{P+H}{2}$ e forma con l'asse \vec{NU} l'angolo $-\frac{\theta}{2}$. Dunque si tratta della stessa retta \mathbf{t}_P , sicché s_P è la (generica) tangente a Δ . In conclusione:

Theorem 8.1. *L'inviluppo delle rette di Simson di un triangolo \mathbf{A} è un'ipocicloide a 3 cuspidi $\Delta = \Delta_A$ (Steiner). Il suo centro è il centro N del cerchio dei nove punti di \mathbf{A} . Gli assi di simmetria di Δ_A hanno le direzioni ternarie di \mathbf{A} ; più precisamente, se il raggio-vettore \vec{OV}_i indica una direzione ternaria (sul circocerkio di \mathbf{A}), le tre cuspidi W_i sono individuate dalle relazioni $N\vec{W}_i = \frac{3}{2}\vec{OV}_i$.*

9. DIMOSTRAZIONE ANALITICA DEL TEOREMA DI STEINER. RUOLO DELLE DIREZIONI TERNARIE

Ci proponiamo di illustrare perché la nozione di direzioni ternarie si dimostra utile anche nella trattazione analitica del problema.

E' facile dimostrare la formula trigonometrica

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2) + \tan(\theta_3) - \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)\tan(\theta_3)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2) + \tan(\theta_1)\tan(\theta_3) + \tan(\theta_2)\tan(\theta_3)}$$

Se sostituiamo ogni θ con $\frac{\theta}{2}$ e scriviamo, come nella tradizione, $t_i = \tan(\frac{\theta}{2})$, la formula precedente diventa $\tan(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2}) = \frac{t_1 + t_2 + t_3 - t_1 t_2 t_3}{1 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}$

Introdotti i polinomi simmetrici elementari

$$\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad \sigma_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \quad \sigma_3 = t_1 t_2 t_3,$$

il secondo membro si scrive $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \sigma_2}$.

Si è visto che, se l'asse delle x positive ha una direzione ternaria, risulta $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$ modulo 2π , quindi $\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} = \frac{\pi}{2}$ modulo π . Allora è nullo il primo membro nella precedente formula trigonometrica e quindi risulta: $t_1 + t_2 + t_3 = t_1 t_2 t_3$, cioè $\sigma_3 = \sigma_1$. Questo semplifica notevolmente i calcoli.

Sia $\mathbf{A} = A_1 A_2 A_3$ il triangolo in questione, O, H, N siano circocentro, ortocentro e novecentro. Con l'omotetia $\eta_{H, \frac{1}{2}} : A_i \rightarrow B_i$ creiamo il triangolo $\mathbf{B} = B_1 B_2 B_3$, iscritto nel novecerchio \mathbf{N} . Scegliamo un riferimento x, y in modo che l'origine sia N , il punto unità U sia sul cerchio dei nove punti e $2\vec{NU} = \vec{OV}$ sia il raggio-vettore di una direzione ternaria di \mathbf{A} . Rappresentiamo razionalmente il punto generico B del novecerchio: $B = [\cos\theta, \sin\theta] = \frac{2}{1+t^2}[t^2 - 1, 2t]$. I vertici di \mathbf{B} saranno $B_i = \frac{1}{1+t_i^2}[1 - t_i^2, 2t_i]$. Per introdurre la retta di Simson, dobbiamo procurarci le coordinate del generico punto P sul circocerkio e, in particolare, quelle dei vertici A_i . A questo scopo occorre anzitutto calcolare le coordinate dell'ortocentro, comune a \mathbf{A} e \mathbf{B} , che risulta $H = \Sigma B_i = [\Sigma \frac{2}{1+t_i^2}[1 - t_i^2, 2t_i] = \frac{1}{1-\sigma_2-1}[3+\sigma_2, -4\sigma_1] = -O$. Allora il punto generico P di \mathbf{C} si determina con l'equazione $\vec{NP} = 2\vec{NB} + \vec{NO}$ e, in particolare, i vertici del triangolo di partenza sono i punti A_i per cui $N\vec{A}_i = 2N\vec{B}_i + \vec{NO}$. Calcolata l'equazione del lato $A_j A_h$, per la proiezione ortogonale di P su $A_j A_h$ si trova un'espressione razionale assai complicata nei parametri t, t_1, t_2 , che qui non trascriveremo ⁷. Tuttavia, per effetto della scelta del riferimento, la condizione di allineamento produce per l'equazione finale della retta di Simson una forma molto

⁷Al numeratore compare la somma di una trentina di monomi

semplice, in cui scompaiono non solo gli indici i ma anche i polinomi simmetrici:

$$s_t : -3t + t^3 + tX + t^3X + Y + t^2Y.$$

E' precisamente l'equazione che abbiamo ricavato nella trattazione cinematica per la tangente \mathbf{t}_t alla ipocicloide, e questo è quanto si voleva.

Volendo continuare con metodi differenziali, l'involuppo di questa famiglia di rette si trova calcolando la derivata $\frac{d}{dt}s_P = -3 + 3t^2 + X + 3t^2X + 2tY$ e risolvendo il sistema $s_P = 0$, $\frac{d}{dt}s_P = 0$ si trova la soluzione $[X, Y] = \frac{1}{(1+t^2)^2} [3 - 6t^2 - t^4, 8t^3]$, cioè le equazioni già incontrate.

A conti fatti, la complicazione dei calcoli intermedi sconsiglia l'uso della geometria analitica per trattare questo problema.

10. CONTATTI. TRIANGOLI INSCRITTI NEL DELTOIDE - FIGURA 6

Delle prossime osservazioni, nate nel corso della preparazione di questa nota, non daremo dimostrazioni.

Tra le rette di Simson che il triangolo $\mathbf{A} = \triangle A_1A_2A_3$ individua *in modo naturale*, oltre ai suoi lati $a_i = A_jA_h$ e alle sue altezze $h_i = HA_i$, se ne possono mettere in evidenza altre tre. Se $\triangle H_1H_2H_3$ indica il triangolo ortico, introduciamo il suo riflesso sul novecentro N ponendo $\mathbf{L} = \triangle L_1L_2L_3$, dove $N = \frac{L_i + H_i}{2}$. Le altezze di \mathbf{L} , che indicheremo con l_i , sono le rette di Simson s_{C_i} dei punti C_i del circocerkchio definiti da $\frac{C_i + H_i}{2} = H$. Così disponiamo di tre nuove tangenti al deltoide ⁸ descrivibili in modo elementare a partire dai vertici. L'interesse si queste rette k_i è il fatto che ad esse appartengono i punti di contatto con Δ_A , sia dei lati sia delle altezze, e precisamente:

L'altezza $h_i = HA_i$ di \mathbf{A} tocca Δ_A nel punto $Q_i = h_i \cap l_i$

Il lato $a_i = A_jA_h$ di \mathbf{A} tocca Δ_A nel punto $R_i = a_i \cap l_i$.

Anche i punti di tangenza delle rette l_i si possono riconoscere come intersezioni: basta intersecare l_i con la retta per K_i (uno dei nove punti) parallela a K_jK_h .

Questi nove punti di Δ_A sono costruibili con riga e compasso, a partire dai vertici A_i del triangolo. Le loro coordinate sono anzi espressioni razionali di quelle dei vertici A_i . Non è così, ovviamente, per le cuspidi e i punti di contatto con il novecerchio ⁹.

Dei punti Q_i, R_i sono inaspettate le seguenti proprietà:

Theorem 10.1. *Hanno la stessa area, che è quella del triangolo ortico $\triangle H_1H_2H_3$, i triangoli inscritti nel deltoide: $\triangle Q_1Q_2Q_3$, $\triangle Q_1R_2R_3$, $\triangle Q_2R_1R_3$, $\triangle Q_3R_1R_2$.*

Hanno la stessa lunghezza, che è quella del diametro del circocerkchio, i tre segmenti Q_iR_i . Essi si incontrano nell'ortocentro di \mathbf{L} ¹⁰ e i loro punti medi sono i punti L_i .

L'equi-estensione di questi triangoli inscritti in Δ si prova per via analitica, ma non se ne vede facilmente una dimostrazione sintetica e tanto meno cinematica. La lunghezza dei segmenti Q_iR_i ha invece un'immediata interpretazione cinematica: si ritrovano infatti tra i diametri dei cerchi di raggio 2 che rotolano entro il cerchio di centro N e raggio 3.

⁸In analogia con il *cerchio dei nove punti*, a Δ_A potremmo dunque attribuire il nome di *deltoide delle nove tangenti*.

⁹Le cui coordinate appartengono a estensioni di grado 3 del campo generato da quelle dei vertici.

¹⁰L'ortocentro del triangolo ortico è un *punto notevole* del triangolo che è stato studiato in tempi relativamente recenti: prende il nome di X_{52} nella classificazione di Kimberling (1998).

11. TRIANGOLI CON LO STESSO DELTOIDE DI STEINER - FIGURA 7

Da quanto abbiamo visto, è chiaro che due triangoli hanno lo stesso deltoide di Steiner se e solo se hanno lo stesso cerchio dei nove punti e le stesse direzioni ternarie. E' noto ed evidente che, se H è l'ortocentro di un triangolo $\mathbf{A} = \triangle A_1 A_2 A_3$, i tre triangoli $\triangle H A_i A_j$ hanno in comune con \mathbf{A} il triangolo ortico e il cerchio dei nove punti. E' meno evidente (ma non è difficile provarlo) che coincidano anche le direzioni ternarie: dunque $\triangle A_1 A_2 A_3$ e i tre triangoli $\triangle H A_i A_j$ hanno lo stesso deltoide ¹¹.

Un'altra proprietà interessante riguarda il triangolo ortico $\mathbf{H} = H_1 H_2 H_3$ di \mathbf{A} : se con l'omotetia $\eta_{H, \frac{1}{2}}$ si fa corrispondere al punto generico P del circocerchio il punto generico Q del novecerchio e si costruisce la retta di Simson t_Q , rispetto al triangolo \mathbf{H} , si scopre che le due rette s_P e t_Q , sono ortogonali. Tra le conseguenze si trova che i due corrispondenti deltoidi sono omotetici e le direzioni ternarie dei due triangoli \mathbf{A} e \mathbf{H} sono opposte. Equivalentemente: un'omotetia trasforma il deltoide Δ_A nel deltoide Δ_E del triangolo $\mathbf{E} = \triangle E_1 E_2 E_3$ i cui vertici sono (tre dei) centri tritangenti di \mathbf{A} (incentro ed excentri). Δ_E è tangente al circocerchio di \mathbf{A} nei punti V_i i cui raggi-vettori $\vec{O}V_i$ definiscono le direzioni ternarie di \mathbf{A} .

E-mail address: scimemi@math.unipd.it

¹¹A questa conclusione si potrebbe arrivare anche per via algebrica, osservando che una quartica è individuata da 14 suoi punti, assai meno di quanti sono i punti di tangenza Q_i, R_i e le loro immagini nelle simmetrie ternarie, un insieme che non varia quando \mathbf{A} si sostituisce con uno dei triangoli $\triangle H A_i A_j$.