Esercizi di Fisica Matematica - Seconda Parte

A.A. 2003-2004

2 febbraio 2005

Pull-back di forme

Calcolare l'integrale del pull-back della forma $\omega \in T^\star\mathbb{R}^2$, rispetto all'immersione $t \mapsto \widetilde{OP}(t)$

1. $\omega = (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$,
   $[1, 2] \ni t \mapsto \widetilde{OP}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$. [**R:** $40 + \frac{19}{30}$]

2. $\omega = (2a - y)dx + xdy$,
   $[0, \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto \widetilde{OP}(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix}$. [**R:** $-2\pi a^2$]

Scrivere il pull-back della forma $\omega \in T^\star\mathbb{R}^3$, rispetto all'immersione della superficie $\Sigma : (\lambda, \mu) \mapsto \widetilde{OP}(\lambda, \mu)$. Trovare una primitiva U di ω, una $\mathcal{U}$ di $\widetilde{OP}^\star \omega$ e verificare che si abbia $\mathcal{U} = U \circ \widetilde{OP}$.

1. $\omega = yzdx + xzdy + xydz$,

   $$\Sigma := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 2 - \mu \end{pmatrix} \right\}.$$ [**R:** $U = xyz, \mathcal{U} = 2\mu\lambda - \mu^2\lambda, \ldots$]

   $$\Sigma := \left\{ \lambda \in (0, 2\pi), \mu \in (0, \pi), \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos\lambda\sin\mu \\ 3\sin\lambda\sin\mu \\ 3\cos\mu \end{pmatrix} \right\}.$$

2. $\omega = (y\cos(xy) - 2xsin(xy)))dx + (x\cos(xy) - 3y^2)dy - 2x\sin(xz)dz$,

   $$\Sigma := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\lambda + 2\mu \\ \mu^2 \\ 2\lambda - \mu \end{pmatrix} \right\}.$$ [**R:** ???]

Integrali Primi

Cercare un integrale primo del moto per i seguenti sistemi differenziali $\dot{x} = X(x)$.

(a) Considerare il campo vettoriale $Y = \mathbb{E}X$, dove $\mathbb{E}$ è la rotazione di $\frac{\pi}{2}$. Cercare una $I(x)$ tale che $\nabla I(x) = Y(x)$.

(b) Se la forma che si cerca di integrare non è chiusa, cercare un fattore integrante.

1. $$\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

[**R:** ??]

2. $$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{3+xy} \\ \dot{y} = \frac{y}{3+xy} \end{cases}$$

[**R:** $\log(3 + xy)$]

3. $$\begin{cases} \dot{x} = 2\cos(x + 2y) \\ \dot{y} = -\cos(x + 2y) \end{cases},$$

[**R:** $I = \sin(x + 2y)$]

4. $$\begin{cases} \dot{x} = -1 \\ \dot{y} = -\frac{|x|'}{|x|} \end{cases}$$

[**R:** $y - \log|x|$]

5. $$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 x \\ \dot{y} = 5x^2 y \end{cases},$$

[**R:** $I = 5x^2 + y^2$]

Funzioni di Liapunòv

Trovare una funzione di Liapunov per i seguenti sistemi differenziali, per l'equilibrio evidenziato.

(a) Cercare una $W(x)$ tale che $-\nabla W(x) = X(x)$.

(b) Provare con una $W(x)$ che abbia un minimo locale stretto nel punto di equilibrio.

1. $$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = -4y \end{cases}$$

[**R:** ??]

2. $$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = -y + x \end{cases}$$

[**R:** ??]

3. $$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 4x^3 \\ \dot{y} = 2 - 2y \end{cases} \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

[**R:** ??]

4. $$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{2x}{2+y} \\ \dot{y} = -\frac{2y}{2+y} + \frac{x^2+y^2}{(2+y)^2} \end{cases} \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[**R:** ??]

5. $$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 x \\ \dot{y} = 5x^2 y \end{cases} \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[**R:** $W = x^2 + y^2$??]

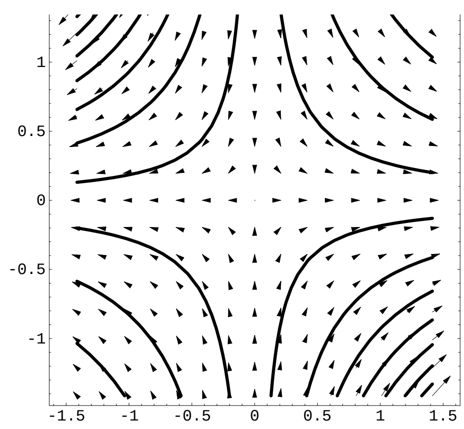
6. $$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{2x(-4+x+y^2)}{(1+x^2)^2} \\ \dot{y} = -\frac{2y}{1+x^2} \end{cases} \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} 4-\sqrt{17} \\ 0 \end{pmatrix}$$

[**R:** ??]

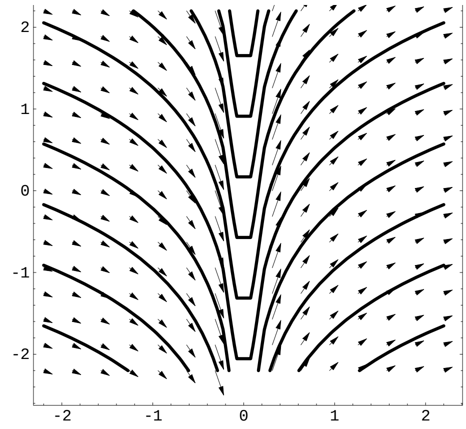
Alcuni grafici

Integrali Primi

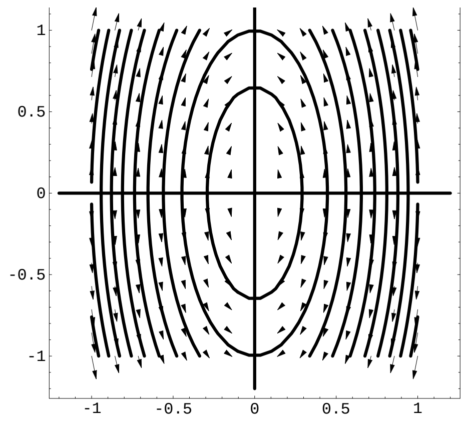
Ex 2



Ex 4 :

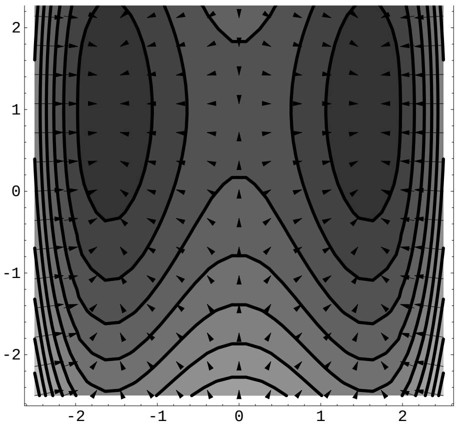


Ex 5

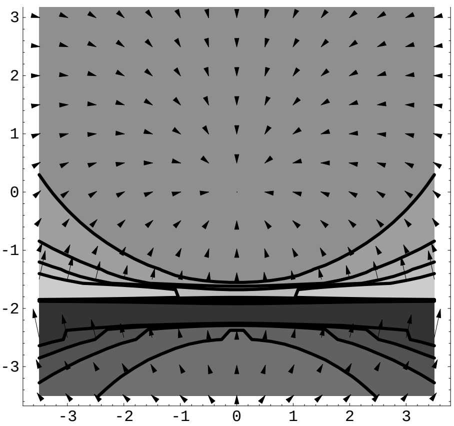


Funzioni di Lyapunov

Ex 3



Ex 4 :



Ex 6