

Esercizi di Fisica Matematica - Terza Parte

A.A. 2003-2004

23 febbraio 2004

Momenti di Inerzia

Cerchiamo di calcolare la matrice d'inerzia per una lamina triangolare isoscele, di base a e di altezza h . Adagiamo il triangolo nel piano xy , mettiamo al centro della base l'origine degli assi, e dirigiamo l'asse y come l'altezza. È cosa ben nota ([$i_{\phi\psi\eta\theta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\delta\epsilon\zeta}$!]) che il baricentro si trova allora in $(0, \frac{h}{3}, 0)$.

Calcoliamo intanto I_{yy} . Si avrà

$$\rho \int_T x^2 dm = 2\rho \int_0^a dx \int_0^{\frac{(a-x)h}{a}} dy x^2 = \dots = \frac{1}{6} a^3 h \rho = \frac{a^2 m}{3}.$$

Per I_{xx} si avrà invece

$$\rho \int_T \left(y - \frac{h}{3}\right)^2 dm = 2\rho \int_0^h dy \int_0^{\frac{a(h-y)}{h}} dx \left(y - \frac{h}{3}\right)^2 = \dots = \frac{1}{18} a h^3 \rho = \frac{h^2 m}{9}$$

Infine, usando un noto teorema ([$i_{\phi\psi\eta\theta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\delta\epsilon\zeta}$!]) per i solidi piani (ehm, Bidimensionali!), si ottiene

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}.$$

Sistemi Linearizzandi

Trovare gli equilibri e studiarne la stabilità con il primo metodo di Liapunov dei seguenti sistemi differenziali del primo ordine. (*i.e.*, studiare il segno della parte reale degli autovalori della matrice $Z'(x_0, y_0)$.)

1.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Z(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \\ \sin x \cos y \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Z(x, y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2(x+1)(y-7)(x-10) \\ (y-3)^2(y+3)(x-9)(y-10) \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Z(x, y) = \begin{pmatrix} x(x-1) \\ y(y-1) \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Z(x, y) = \begin{pmatrix} -xy \\ x^2 - 1 - y \end{pmatrix}$$

Matrici cinetiche

Consideriamo la 2-sfera unitaria \mathbb{S}^2 , e due parametrizzazioni locali sul piano xy . Determinare nei due casi la matrice cinetica $\mathcal{A}(x, y)$.

1. La proiezione verticale sul piano xy :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \widetilde{OP}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

2. La proiezione stereografica

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \widetilde{OP}(x, y) = \begin{pmatrix} x = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} \\ y = \frac{2\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} \\ z = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 1}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ricordiamo che deve essere

$$\frac{1}{2}m \left| \dot{OP} \right|^2 = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{y}) \mathcal{A}(x, y) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

e che si trova che

$$\dot{OP} = d\widetilde{OP}(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{\partial \widetilde{OP}(x, y)}{\partial(x, y)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$