Temi d'esame di Fisica Matematica

S.Rossin M.Patassini A.Gatto M.Perone
V.Settimi I.Lamura

16 febbraio 2005

Appello del 7 maggio 2001

Esercizio A:

Un punto materiale P di massa m è vincolato su di una guida circolare liscia di raggio R con centro nell'origine di un riferimento (O, x, y, z) e posta nel piano vericale Oxy ($\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$). Si riferisca il sistema all'angolo θ, valutato in senso antiorario, tra la direzione negativa dell'asse y e il segmento OP.

Il punto P è soggetto alla sola forza peso e il riferimento (O, x, y, z) ruota rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{y}}$, $\omega > 0$, costante.

1. *Verificare che la componente lagrangiana rispetto alla coordinata θ della forza di Coriolis, agente sul punto P nel moto rispetto al riferimento (O, x, y, z) è nulla.*

2. *Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio relativo al variare di ω nei reali e tracciare il diagramma di biforcazione.*

3. *Dire con quali altre tecniche è possibile studiare la stabilità degli equilibri di questo sistema (1-dimensionale). Motivare brevemente la risposta.*

Si supponga ora che il punto materiale P sia soggetto anche alla forza di attrito viscoso $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$.

4. *Scrivere l'equazione del moto nel riferimento rotante e proiettarla sul versore $\mathbf{t}$ della terna di Frenet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ per ottenere l'equazione pura del moto.*

5. *Con riferimento alla equazione pura (la componente $\mathbf{t}$), studiare la stabilità asintotica dell'equilibrio $\theta = 0$ al variare del parametro ω nei reali positivi (primo metodo di Liapunov).*

6. *studiare la stabilità dell'equilibrio $\theta = 0$ con tecniche viste* diverse *dal primo metodo di Liapunov.*

Svolgimento: Scriviamo l'immersione del vincolo nel sistema rotante (O, x, y, z).

$$\theta \mapsto OP(\theta) = \begin{pmatrix} R\sin\theta \\ -R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \delta P = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \delta\theta = \mathbf{t}R\delta\theta = \mathbf{t}R\dot{\theta}dt,$$

$$\mathbf{v}^{(r)} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}.$$

Le forze agenti sul punto materiale P sono la gravità, le forze inerziali (centrifuga e di Coriolis) e ovviamente le reazioni vincolari,

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \Phi + F^{cf} + F^{Cor},$$

dove

$$F^{cf} = -m(\omega \wedge (\omega \wedge OP)) = -\omega\widehat{\mathbf{y}} \wedge \left(\omega\widehat{\mathbf{y}} \wedge \begin{pmatrix} R\sin\theta \\ -R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \omega^2 R \sin\theta \widehat{\mathbf{y}} \wedge \widehat{\mathbf{z}} = \omega^2 R \sin\theta \widehat{\mathbf{x}}$$

e

$$F^{Cor} = -2m\omega \wedge \mathbf{v}^{(r)} = -2m\omega \wedge \mathbf{t}R\dot{\theta},$$

mentre Φ è da determinarsi, se possibile.

1. Scriviamo le componenti Lagrangiane della sollecitazione

$$\begin{aligned} \delta L^{Cor} = F^{Cor} \cdot \delta P = -2m\omega \wedge \mathbf{v}^{(r)} \cdot \mathbf{v}^{(r)} dt = \\ = -2m\omega\widehat{\mathbf{y}} \wedge R\dot{\theta}\mathbf{t} \wedge R\mathbf{t}d\theta = -2m\omega R^2(\widehat{\mathbf{y}} \wedge \mathbf{t} \cdot \mathbf{t})d\theta = \\ = -2m\omega R^2(\mathbf{t} \wedge \mathbf{t} \cdot \widehat{\mathbf{y}})d\theta = 0 \cdot d\theta = Q_\theta^{Cor} d\theta \quad \Rightarrow \qquad Q_\theta^{Cor} = 0. \end{aligned}$$

2. Le forze coinvolte sono posizionali e giroscopiche, quindi tutte conservative:

$$\begin{aligned} \delta L^g =& m\mathbf{g} \cdot \delta P = -mgR\sin\theta d\theta = d(mgR\cos\theta), \\ & \Rightarrow \qquad \mathcal{U}^g(\theta) = -mgR\cos\theta, \\ \delta L^{cf} =& F^{cf} \cdot \delta P = \omega^2 R \sin\theta \widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}Rd\theta = \\ =& \omega^2 R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta = d\left(\omega^2 R^2 \frac{\sin^2\theta}{2}\right) \\ & \Rightarrow \qquad \mathcal{U}^{cf}(\theta) = -m\omega^2 R^2 \frac{\sin^2\theta}{2}, \end{aligned}$$

Equilibri:

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = mR\sin\theta(g - \omega^2 R\cos\theta) = 0,$$

$$\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \theta = 0, \pi, \qquad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R} \leq 1.$$

$$\theta_{1,2} = 0, \pi, \qquad \theta_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right), \qquad \text{se} \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Stabilità:

$\boxed{(\theta_1).}$

$$\mathcal{U}'' = mR\cos\theta(g - \omega^2 R\cos\theta) + m\omega^2 R^2 \sin^2\theta,$$

$$\mathcal{U}''(\theta_1) = mR(g - \omega^2 R),$$

quindi $\mathcal{U}''(\theta_1) > 0$ per $\omega < \sqrt{g/R}$. Si conclude che θ_1 è stabile per $\omega^2 < \frac{g}{R}$ (per Lagrange-Dirichlet), mentre è instabile per $\omega^2 > \frac{g}{R}$ (teorema dell'Hessiano non degenere). Per $\omega^2 = g/R$, si trova che $\mathcal{U}''(\theta_1) = \mathcal{U}^{(iii)}(\theta_1) = 0$, $\mathcal{U}^{(iv)}(\theta_1) > 0$, per cui θ_1 è ancora stabile sempre per Lagrange-Dirichlet.

$\boxed{(\theta_2).}$

$$\mathcal{U}''(\theta_2) = -mR(g + \omega^2 R) < 0$$

, per cui θ_2 è instabile per ogni $\omega > 0$ per THND.

$\boxed{(\theta_{3,4}).}$

$$\mathcal{U}''(\theta_3) = \mathcal{U}''(\theta_4) = m\omega^2 R^2 \sin^2(\theta_{3,4}) > 0,$$

per cui $\theta_{3,4}$ sono stabili per qualunque valore di ω, (sempre che esistano...).

□

Appello del 9 Dicembre 2002

Esercizio 1:

Svolgimento: I moti dinamicamente possibili proiettati lungo gli assi risultano:

$$\begin{cases} m\ddot{x} & = & -\frac{\partial U}{\partial x} \\ 0 & = & \phi_y \\ 0 & = & -mg + \phi_z \end{cases}$$

ove $\Phi = (0, \phi_y, \phi_z)$ è la reazione vincolare (la componente lungo x è nulla perché il vincolo è senza attrito).

L'equazione pura del moto è quindi:

$$\ddot{x} = 4Ax^3 \tag{$\star$}$$

L'energia totale del sistema è:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - Ax^4$$

Ci viene chiesto di studiare tutti i moti dinamicamente possibili aventi energia totale nulla. Poiché in un sistema conservativo l'energia è integrale primo, la curva di livello $E(x, \dot{x}) = 0$ deve contenere il supporto di tutti tali moti.

Se $t \mapsto x(t)$ è soluzione allora necessariamente si ha:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - Ax^4 = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 = 2Ax^4 \Rightarrow |\dot{x}| = \sqrt{2A}x^2$$

Notiamo che $\dot{x}$ ha segno costante; infatti, se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\dot{x}(t) = 0$ allora $x(t) = 0$, quindi il moto $t \mapsto x(t) \equiv 0$ è dinamicamente possibile e questa è l'unica soluzione del problema di Cauchy (notiamo che il campo vettoriale dell'equazione differenziale ($\star$) è C^∞ e quindi la soluzione è necessariamente unica) con condizioni iniziali $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$. Da ciò deriva che qualsiasi altra soluzione con energia nulla è tale che $\dot{x}$ non si annulla mai e quindi ha segno costante.

Pertanto possiamo scrivere:

$$\dot{x} = \operatorname{sgn}(\dot{x}_0)\sqrt{2A}x^2$$

Quindi, integrando sull'intervallo $[0, t]$, tenendo conto che x non si annulla mai (altrimenti si annullerebbe $\dot{x}$),

$$\int_0^t \frac{\dot{x}}{x^2}dt = \int_0^t \operatorname{sgn}(\dot{x_0})\sqrt{2A}dt$$
$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\bar{x}}{\bar{x}^2} = \operatorname{sgn}(\dot{x_0})t\sqrt{2A}$$
$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(\dot{x_0})t\sqrt{2A}$$

e quindi si ha:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_0)t\sqrt{2A}}$$

Fissate le condizioni inziali $(x_0, \dot{x}_0)$, poiché l'energia è integrale primo, l'insieme dei moti che risolvono l'equazione $E(x, \dot{x}) = 0$ contiene l'unica soluzione del problema di Cauchy $(\star)$. Dal momento che, per ogni assegnazione di dati iniziali con energia nulla, abbiamo trovato una sola soluzione sfruttando l'integrale primo dell'energia, essa è esattamente quella cercata. $\square$

Esercizio 2:

Svolgimento: Il sistema è della forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\sin x - x^4 v \end{cases}$$

1. Proviamo ad utilizzare il I metodo di Liapunov: innanzitutto linearizziamo il sistema. Per farlo dobbiamo calcolare il differenziale del campo vettoriale associato al sistema dinamico in $(0, 0)$.

Sia quindi $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$$X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\sin x - x^4 v \end{pmatrix}$$

Quindi si ha che:

$$X'(x, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x - 3x^3 v & -x^4 \end{pmatrix}$$

e il sistema linearizzato è:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = X'(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Cerchiamo ora gli autovalori di $X'(0,0)$:

$$\det(X'(0,0) - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Quindi $ReSpectX'(0,0) = 0$: il I metodo di Liapunov non dice nulla.
2. Notiamo che il sistema si può riscrivere come:

$$\ddot{x} = -\sin x - x^4 \dot{x}$$

quindi possiamo pensare all'energia del sistema come candidata funzione di Liapunov. Si ha che, innanzitutto l'energia potenziale è:

$$U(x) = -\cos x$$

dal momento che la parte posizionale e conservativa è solo $-\sin x$; l'energia totale risulta:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x$$

Poiché deve essere definita positiva e deve assumere 0 in $(0,0)$, si ha che la funzione di Liapunov (candidata) sarà:

$$W(x, v) = \frac{v^2}{2} - \cos x + 1$$

La derivata di Lie porge:

$$L_X W(x,v) = \nabla W(x,v) \cdot X(x,v) = (\sin x, v) \cdot \begin{pmatrix} v \\ -\sin x - x^4 v \end{pmatrix} = -x^4 v^2 \leq 0$$

Quindi $(0,0)$ è stabile. □

Esercizio 3:

Svolgimento: Non ha senso considerare come funzioni di Liapunov f o h perché in esse compaiono $\dot{x}$ e $\dot{y}$, mentre g è definita positiva intorno a $(0,0)$

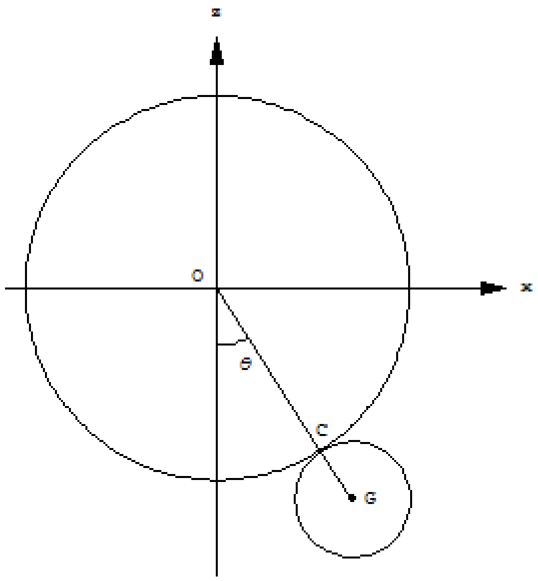
Calcoliamo quindi:

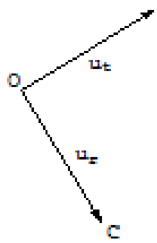
$$L_X g(x,y) = \nabla g(x,y) \cdot \begin{pmatrix} -x^3 + y^3 \\ -x^3 - y^3 \end{pmatrix} = (x^3, y^3) \cdot \begin{pmatrix} -x^3 + y^3 \\ -x^3 - y^3 \end{pmatrix} = -(x^6 + y^6)$$

$L_X g$ è definita negativa intorno a $(0,0)$, pertanto $(0,0)$ è asintoticamente stabile. □

Appello del 17 settembre 2001 - Mod. A

Esercizio A:





Svolgimento: (a) L'energia potenziale del sistema è:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^g + \mathcal{U}^{cf}$$

$\mathcal{U}^g$ è l'energia potenziale gravitazionale:

$$\mathcal{U}^g = -mg(R + r)\cos\theta$$

Invece l'energia potenziale centrifuga è:

$$\mathcal{U}^{cf} = -\frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}(I_{disco} + md^2)\omega^2$$

dove $d = (R + r)sin\theta$ è la distanza del baricentro dall'asse di rotazione.

$$I_{disco} = \int_{disco} (dist)^2 dm =$$

$$(dist = r \cdot s, \qquad s \in [0, 1], \qquad dm = \rho d\Sigma, \qquad d\Sigma = 2\sqrt{1 - s^2}ds)$$

$$= \rho \int_0^1 4r^2 s^2 \sqrt{1 - s^2}ds = 4r^2\rho \int_0^1 s^2\sqrt{1 - s^2}ds = ...$$

Questo integrale non dipende da θ quindi non incide nel calcolo degli equilibri.

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\theta) = -mg(R+r)\cos\theta - \frac{\omega^2}{2}(md^2 + I_{zdisco}) = \\ = -mg(R+r)\cos\theta - m\frac{\omega^2}{2}(R+r)^2\sin^2\theta + cost\end{aligned}$$

Equilibri:

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = m(R+r)\sin\theta(g - \omega^2(R+r)\cos\theta) = 0$$

$$\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \theta_{1,2} = 0, \pi$$

$$g - \omega^2(R+r)\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow \theta_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2(R+r)}\right),$$

se $\omega^2 \geq \frac{g}{(R+r)}$. **Stabilità:** Applichiamo il THND:

$\boxed{(\theta_1).}$

$$\mathcal{U}''(\theta_1) > 0 \text{ per } \omega^2 < \frac{g}{(R+r)} \qquad \Rightarrow \theta_1\text{stabile}$$

$$\mathcal{U}''(\theta_1) < 0 \text{ per } \omega^2 > \frac{g}{(R+r)} \qquad \Rightarrow \theta_1\text{instabile}$$

$$\mathcal{U}''(\theta_1) = 0, \qquad \mathcal{U}'''(\theta_1) = 0, \qquad \mathcal{U}^{IV}(\theta_1) > 0,$$

per $\omega^2 = \frac{g}{(R+r)}$ $\Rightarrow$ θ_1 stabile (in questo caso per TLD, visto che l'hessiano è degenere)

$\boxed{(\theta_2).}$

$$\mathcal{U}''(\theta_2) < 0 \forall \omega^2 \qquad \Rightarrow \theta_2 \quad \text{instabile}$$

$\boxed{(\theta_{3,4}).}$

$$\mathcal{U}''(\theta_{3,4}) > 0 \text{ per } \omega^2 > \frac{g}{(R+r)} \qquad \Rightarrow \theta_{3,4} \qquad \text{stabili, quando esistono.}$$

(b) Sia
$$\mathbf{b_r} = vers(OC), \qquad \mathbf{u_t} \wedge \mathbf{u_r} = \widehat{\mathbf{y}}$$

Nel sistema relativo, per la formula fondamentale dei moti rigidi:

$$v_G = v_C + \omega_{\mathbf{D}} \wedge CG$$

$$v_G = (R+r)\dot{\theta}\mathbf{u_t}, \qquad v_C = 0 \qquad \text{(perché moto di puro rotolamento)}$$

$$\omega_{\mathbf{D}} = \omega_D \widehat{\mathbf{y}}, \qquad CG = r\mathbf{u_r}, \qquad \omega_D \widehat{\mathbf{y}} \wedge r\mathbf{u_r} = -r\omega_D \mathbf{u_t} = (R+r)\dot{\theta}\mathbf{u_t}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_{\mathbf{D}} = -(\frac{R+r}{r})\dot{\theta}\widehat{\mathbf{y}}$$

La velocità angolare assoluta è

$$\omega^a = \omega^\tau + \omega^r = \omega\widehat{\mathbf{z}} - (\frac{R+r}{r})\dot{\theta}\widehat{\mathbf{y}}$$

(espressa nel riferimento relativo $Oxyz$)

(c) Nel riferimento inerziale $OXYZ$:

$$m\mathbf{a_G^a} = \mathbf{R^{ext}} = m\mathbf{g} + \mathbf{\Phi}$$

Il punto G si muove di moto circolare uniforme ($\dot{\theta} = 0$ all'equilibrio) su una circonferenza di raggio $\rho = (R+r)sin\theta_{eq}$ perpendicolare all'asse Z.

$$m\mathbf{a_G^a} = -m\omega^2\rho\widehat{\mathbf{X}} = -mg\widehat{\mathbf{Z}} + \mathbf{\Phi}$$

da cui
$$\Phi_X = -m\omega^2\rho, \qquad \Phi_Y = 0, \qquad \Phi_Z = mg$$

□

Appello del 18 Dicembre 2003 - Mod.B

Esercizio 1

Svolgimento: Scriviamo l'energia potenziale per i punti A e B :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(g)} + \mathcal{U}^{(el)} =$$

$$= -mgl\cos\theta mgl\cos\phi + \frac{h(2l\sin\frac{\phi+\theta}{2})^2}{2} =$$

$$= -mgl(\cos\theta + \cos\phi) + 2l^2 h\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}$$

Gli equilibri del sistema sono le soluzioni di

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta} = \mathcal{U}_\theta = mgl\sin\theta + l^2 h\sin\frac{\phi+\theta}{2}\cos\frac{\phi+\theta}{2} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\phi} = \mathcal{U}_\phi = mgl\sin\phi + l^2 h\sin\frac{\phi+\theta}{2}\cos\frac{\phi+\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui, sottraendo la seconda equazione alla prima, si ottiene

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin\phi \\ mgl\sin\phi + l^2 h\sin\frac{\phi+\theta}{2}\cos\frac{\phi+\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

Distinguiamo i due casi:

$$\begin{cases} \text{Caso A:} \quad \theta = \phi \\ \text{Caso B:} \quad \theta = \pi - \phi \end{cases}$$

Caso A: il sistema diventa

$$\begin{cases} \theta = \phi \\ mgl\sin\theta + l^2 h\sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

da cui

1. $\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{1,2} = 0, \pi \quad , \quad \phi_{1,2} = 0, \pi$
   che da' i punti di equilibrio $\quad S_1 = (0, 0) \quad , \quad S_2 = (\pi, \pi)$;

2. $\cos\theta = -\frac{mg}{hl} > -1 \quad \Rightarrow \quad hl > mg$
   perche' esistano le soluzioni $\theta_3 = \arccos(-\frac{mg}{hl}) \quad , \quad \theta_4 = -\theta_3$,
   che danno i punti di equilibrio $\quad S_3 = (\theta - 3, \theta_3) \quad , \quad S_4 = (\theta_4, \theta_4)$.

Caso B: il sistema diventa

$$\begin{cases} \theta = \pi - \phi \\ mgl\sin\phi + hl^2 \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui gli equilibri $\quad S_5 = (0, \pi) \quad , \quad S_6 = (\pi, 0)$

Stabilita' della configurazione $S_1 = (0, 0)$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} = mgl\cos\theta + \frac{l^2 h}{2}(\cos^2(\tfrac{\phi+\theta}{2}) - \sin^2(\tfrac{\phi+\theta}{2}))$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi^2} = mgl\cos\phi + \frac{l^2 h}{2}(\cos^2(\tfrac{\phi+\theta}{2}) - \sin^2(\tfrac{\phi+\theta}{2}))$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \phi} = \frac{l^2 h}{2}(\cos^2(\tfrac{\phi+\theta}{2}) - \sin^2(\tfrac{\phi+\theta}{2}))$$

La matrice Hessiana calcolata in S_1 e'

$$\mathbf{H}_{\mathcal{U}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} mgl + \frac{l^2 h}{2} & \frac{l^2 h}{2} \\ \frac{l^2 h}{2} & mgl + \frac{l^2 h}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} mgl + \frac{l^2 h}{2} > 0 \\ det H_{\mathcal{U}}(0,0) = (mgl + \frac{l^2 h}{2})^2 - (\frac{l^2 h}{2})^2 = m^2 g^2 l^2 + mgl^3 h > 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$\Rightarrow \qquad H_{\mathcal{U}}(0,0)$ e' definita positiva
$\Rightarrow \qquad S_1 = (0,0)$ e' stabile per THND.

Piccole oscillazioni

Scriviamo l'energia cinetica per i punti A e B:

$$\begin{cases} x_A = l\sin\theta \\ y_A = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_A = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_A = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \; v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

Analogamente per v_B, e si ottiene

$$T(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}(v_A^2 + v_B^2) = \frac{m}{2}(l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)) = \frac{1}{2}(\dot{\theta}, \dot{\phi}) A \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

ove A e' la matrice cinetica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}$$

Calcolo le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile con la formula:

$$det(\mathbf{H}_{\mathcal{U}}(\mathbf{0},\mathbf{0}) - \omega^{\mathbf{2}}\mathbf{A}) = det\left[\begin{pmatrix} mgl + \frac{l^2h}{2} & \frac{l^2h}{2} \\ \frac{l^2h}{2} & mgl + \frac{l^2h}{2} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= det\begin{pmatrix} mg + \frac{lh}{2} - \omega^2 ml & \frac{lh}{2} \\ \frac{lh}{2} & mg + \frac{lh}{2} - \omega^2 ml \end{pmatrix} =$$

$$= m^2g^2 + \frac{l^2h^2}{4} + \omega^4 m^2 l^2 + mglh - 2m^2\omega^2 gl - l^2 h\omega^2 m - \frac{l^2h^2}{4} = 0$$

che ha soluzioni in ω^2

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \qquad , \quad \omega_2^2 = \frac{mg + lh}{ml}$$

$\square$

Primo compitino mod A del 1 dicembre 2000

Esercizio A.1:

Svolgimento: $\underline{F}(x,y,z) = (\frac{1}{x^3} + z^2 y, -y^3 - zx^2, z^3)$

Vincolo : asse x.

Immersione vincolare: $\mathbb{R} \ni x \mapsto \widetilde{OP}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nota: x è anche parametro d'arco!
Non c'è curvatura quindi non utilizziamo una Terna di Frenet, comunque proiettiamo l'equazione sul vincolo (c'è sempre un vettore $\mathbf{t}$).
Cosa diventa lo spostamento virtuale?

$$\delta OP = \frac{\partial \widetilde{OP}}{\partial x}(x)dx = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{t}dx$$

$$\mathbf{t} = \frac{\widetilde{OP}'}{\left|\widetilde{OP}'\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{|1|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cosa diventa la forma lavoro?

1.

$$\delta L = F \cdot \delta OP = F(\widetilde{OP}(x)) \cdot \frac{\partial \widetilde{OP}}{\partial x} dx =$$

$$= (\frac{1}{x^3}, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \frac{1}{x^3} dx =$$

$$= d(-\frac{1}{2x^2}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{U}(x) = \frac{1}{2x^2}$$

Grafico dell'energia potenziale e ritratto in fase:

2.

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sgn}(\dot{x}(0))\sqrt{2e - \frac{1}{x^2}} \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x} = (\pm ?)\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Come determinare il segno che bisogna prendere? Anche se $\dot{x}(0) = 0$ $\ddot{x}(0) = 1 > 0$ (Chiaramente, $F = ma$, $m = 1$, $F = \frac{1}{x^3} = 1$)per cui prendo il segno + ! Perciò, separando le variabili:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \dots \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$$

$\square$

Esercizio A.2:

Svolgimento: $\underline{F}(x, y, z) = (\frac{1}{x^3} + z^2 y, -y^3 - zx^2, z^3)$

$$\delta \mathbf{P} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

1.

$$\delta L = F \cdot \delta P = (-x^3 + z^2 y, -y^3 - zx^2, z^3) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$

$$= (-x^3 + z^2 y)dx - (-y^3 - zx^2)dy + z^3 dz =$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Verifica della chiusura:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = z^2 \qquad\qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -2zx$$

Non è chiusa, dunque la forma lavoro associata, F, non è conservativa.

2. Immersione vincolare: $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \widetilde{OP}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\delta OP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{OP}}{\partial x} dx \\ \frac{\partial \widetilde{OP}}{\partial y} dy \end{pmatrix}$$

$$\delta L = F(\widetilde{OP}(x, y)) \cdot \delta \widetilde{OP} =$$

$$= F_{Oxy}(\widetilde{OP}(x, y)) \cdot \frac{\partial \widetilde{OP}}{\partial x} dx + \frac{\partial \widetilde{OP}}{\partial y} dy =$$

$$= (-x^3, -y^3, 0) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = -x^3 dx - y^3 dy =$$

$$= d(-\frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4}) \qquad \Rightarrow \qquad F_{Oxy} \text{è conservativa.}$$

$$\mathcal{U}(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{4} \qquad \text{è l'energia potenziale.}$$

$$\mathcal{U}' = (x^4, y^4) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0)$$

$$(x,y) = (0,0) \qquad \text{è l'unico equilibrio.}$$

Ed è chiaramente un minimo di $\mathcal{U}$. Per Lagrange Dirichelet è anche stabile.

□

Esercizio B:

Svolgimento:

$$OP = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{OP} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \delta P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \mathbf{t}$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{è l'immersione.}$$

$m\ddot{x} = -hx + m\omega^2 x$ è l'equazione del moto.

$m\mathbf{a^{(r)}} = F_{el} + F_{cf}$
$0 = \Phi$
$\ddot{x} = (\omega^2 - \frac{h}{m})x$

$\omega^2 \neq \frac{h}{m}$ equilibrio per $x = 0$
$\omega^2 = \frac{h}{m}$ equilibrio $\forall x \in \mathbb{R}$

Stabilità???????????

$O^*O = t\widehat{\mathbf{y}}, \qquad \hat{x}(0) = \hat{X}(0), \qquad \omega > 0$ costante.

$$\mathbf{v_p}^{(\tau)} = \mathbf{v_p^{(a)}} - \mathbf{v_p^{(r)}} = \mathbf{v_p^{(a)}} = \mathbf{v_O^{(a)}} + \omega^{(\tau)} \wedge OP = \frac{d}{dt}(O^*O(t)) + \omega\hat{y} \wedge x\hat{x} = \hat{y} - \omega x\hat{z}.$$

$$\mathbf{a_p}^{(\tau)} = \mathbf{a_O^{(a)}} + \dot{\omega} \wedge OP + \omega \wedge (\omega \wedge OP) = -\omega^2 OP = -\omega^2 x\hat{x} = \dots$$

$\square$

Primo compitino del 26 novembre 1999

Esercizio A:

Svolgimento:

$$F = \begin{pmatrix} -x - x^2 \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Allora:

$$\begin{aligned} F \cdot \delta OP &= (-x - x^2)dx - ydy - zdz = \\ &= d\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right) = \\ &= -d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Da cui:

$$U(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

1. Poiché la particella è vincolata all'asse x, l'immersione è:

$$t \mapsto \widetilde{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora l'energia potenziale del sistema vincolato è:

$$\mathcal{U}(x) = U(\widetilde{OP}) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Equilibri:

$$\mathcal{U}(x) = x + x^2 = x(1 + x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = -1.$$

Studio di $\mathcal{U}(x)$ nei due equilibri:

$$\mathcal{U}''(x) = 1 + 2x$$

$\mathcal{U}''(x_1) = 1 > 0$:

$x_1 = 0$ è punto di minimo locale stretto per $\mathcal{U}(x)$. Allora, per il teorema di Lagrange-Dirichlet, il punto $(0, 0, 0)$ è un'equilibrio stabile.

$\mathcal{U}''(x_2) = -1 < 0$:

$x_2 = -1$ è punto di massimo locale stretto per $U(x)$. Allora, per il teorema dell'Hessiano non degenere, il punto $(-1, 0, 0)$ è un'equilibrio instabile.

2. Il sistema è soggetto alla sola forza $F(x)$ conservativa. Allora l'energia totale:
$$\mathcal{E}(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) + \mathcal{U}(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$
è integrale primo.

   $\mathcal{E}(x, \dot{x})$ è anche funzione di Liapunov. Infatti, detto $x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ha:

   i) $\mathcal{E}(x^*) = 0$,
   ii) $\mathcal{E}(x, \dot{x}) > 0$ in un intorno forato di x^*, poichè x_1 è minimo locale,
   iii) $\frac{d\mathcal{E}}{dt}(x, \dot{x}) = \mathcal{L}_x\mathcal{E} = 0$ lungo i moti.

   Infatti l'equazione di Newton è:
$$ma = \ddot{x} = F(\widetilde{OP}) = -x - x^2$$
$$\Rightarrow \dot{x} = v \qquad \dot{v} = -x - x^2.$$
$$\mathcal{L}_x\mathcal{E}(x, v) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}\dot{v} =$$
$$= (x + x^2)v + v(-x - x^2) = 0 < 0$$
   Quindi $\mathcal{E}$ è funzione di Liapunov e $(0, 0, 0)$ è un equilibrio stabile.

3. Studio di $\mathcal{U}(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = x^2(\frac{1}{2} + \frac{x}{3})$

   Dominio: $\mathcal{R}$

   Intersezioni con lasse delle ascisse: $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$

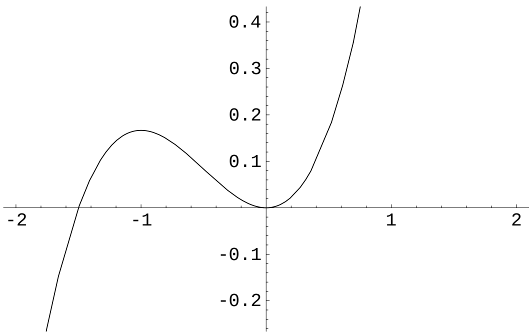
   Segno: $\mathcal{U} > 0$ per $x > -\frac{3}{2}$

   Derivata prima: $\mathcal{U}(x) = x + x^2 = x(1 + x) = 0$ per $x = -1$ o $x = 0$

   $\mathcal{U}(x) > 0$ per $x < -1$ oppure $x > 0$

   Derivata seconda: $\mathcal{U}''(x) = 1 + 2x = 0$ per $x = -\frac{1}{2}$

   $\mathcal{U}''(x) > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$


0.4
0.3
0.2
0.1
-2
-1
1
2
-0.1
-0.2

□

Secondo compitino del 16 gennaio 2001

Esercizio 1

Svolgimento: Per studiare gli equilibri e l'eventuale stabilità di essi consideriamo l'espressione del potenziale delle forze conservative:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^g + \mathcal{U}^{el} + \mathcal{U}^{cf}$$

ove indichiamo con $\mathcal{U}^g$ il potenziale della gravità, con $\mathcal{U}^{el}$ il potenziale della forza elastica e con $\mathcal{U}^{cf}$ quello della della forza centrifuga. Si ha adesso:

$$\mathcal{U}^g = mgh_G \qquad \mathcal{U}^{el} = \frac{1}{2}hl^2 \qquad \mathcal{U}^{cf} = -\frac{1}{2}I_L^Z(\varphi,\vartheta)\omega^2$$

ove indichiamo con h_G la distanza tra il baricentro G della lamina e l'asse delle x, con l la lunghezza della molla, cioè la distanza tra il baricentro e l'asse delle y e con I_L^Z il momento d'inerezia della lamina, nella configurazione (φ,ϑ) rispetto all'asse z.

Ora, per il teorema di Huygens-Steiner, sappiamo che

$$I_L^Z = md^2 + I_L^G$$

dove d è la distanza del baricentro G dall'asse z, e I_L^G è il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse passante per G parallelo all'asse z.

A questo punto consideriamo che

$$I_L^G = \left\langle \widetilde{I_G} n, n \right\rangle$$

dove $\widetilde{I_G}$ è l'operatore (matrice) d'inerzia in G e n è il versore dell'asse parallelo a z passante per G.

Nel riferimento principale di inerzia, la matrice $\widetilde{I_G}$ è esprimibile nella forma diagonale:

$$\widetilde{I_G} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Calcoliamoci ora I_{xx}:

$$I_{xx} = \int_L y^2 dm = \int_0^{\frac{b}{2}} 2a\rho y^2 dy = \frac{mb^2}{12}$$

considerato che $dm = \rho a dy$ e $\rho = \frac{m}{ab}$. Svolgendo conti analoghi (o facendo considerazioni sulla simmetria del sistema) per I_{yy} e considerando che se il sistema è piano si ha $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$, si ottiene la seguente matrice d'inerzia:

$$\widetilde{I_G} = \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$$

Avendo adesso $n = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, si ottiene:

$$\left\langle \widetilde{I_G} n, n \right\rangle = \frac{m}{12}(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)$$

Sapendo adesso che $h_G = -R\cos\theta$ e $l = d = R\sin^2\theta$ si ottiene l'espressione dell'energia potenziale nelle variabili θ e φ:

$$\mathcal{U}(\varphi,\theta) = -mgR\cos\theta + \frac{(h - m\omega^2)}{2}R^2\sin^2\theta - \frac{m\omega^2}{24}(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)$$

Per trovare gli equilibri dobbiamo adesso trovare i valori di φ e di θ che annullano il gradiente di $\mathcal{U}(\varphi,\theta)$. Si ottiene il seguente sistema, composto da due equazioni indipendenti:

$$\begin{cases} \frac{m\omega^2}{12}(b^2 - a^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0 \\ [mg + (h - m\omega^2)R\cos\theta]\, R\sin\theta \end{cases}$$

Si ottengono così per φ i valori $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \pi$ e $\varphi_4 = \frac{3}{2}\pi$. Per θ si devono considerare due casi:

- $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$
- $mg + (h - m\omega^2)R\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \qquad \cos\theta_{3,4} = -\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}$

Per ipotesi si ha che $\cos\theta_{3,4} < 0$; così, se $\frac{mg}{(h-m\omega^2)R} \leq 1$, si ottengono anche le soluzioni $\theta_3 = \arccos(-\frac{mg}{(h-m\omega^2)R})$, con $\frac{\pi}{2} < \theta_3 < \pi$, e $\theta_4 = -\theta_3$.

Gli equilibri risultano quindi essere le 16 coppie ordinate (φ_i, θ_j) per $i, j = 1, 2, 3, 4$. Per quanto concerne la stabilità basterà studiare i casi $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ e $\theta = 0, \pi, \arccos(-\frac{mg}{(h-m\omega^2)R})$ per chiare ragioni di simmetria.

Calcoliamo ora la matrice Hessiana di $\mathcal{U}$, che ci permetterà di studiare la stabilità degli equilibri.

$$\mathcal{H}(\mathcal{U})(\varphi,\theta) = \\ = \begin{pmatrix} \frac{m\omega^2}{12}(b^2 - a^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} (m\omega^2-h)R^2\sin^2\theta + \\ + \left[mg + (h-m\omega^2)R\cos\theta\right]R\cos\theta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

In $(0,0)$:

$$\mathcal{H}(\mathcal{U})(0,0)=\begin{pmatrix} \frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2)<0 & 0 \\ 0 & \left[mg+(h-m\omega^2)R\right]R \end{pmatrix}$$

é instabile per il teorema dell'Hessiano non degenere.

In $(\frac{\pi}{2},0)$:

$$\mathcal{H}(\mathcal{U})(\frac{\pi}{2},0)=\begin{pmatrix} -\frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2)>0 & 0 \\ 0 & \left[mg+(h-m\omega^2)R\right]R \end{pmatrix}$$

é stabile per il teorema dell'Hessiano non degenere.

In $(0,\pi)$:

$$\mathcal{H}(\mathcal{U})(0,\pi)=\begin{pmatrix} \frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2)<0 & 0 \\ 0 & -mgR+(h-m\omega^2)R^2 \end{pmatrix}$$

é instabile per il teorema dell'Hessiano non degenere.

In $(\frac{\pi}{2},\pi)$

$$\mathcal{H}(\mathcal{U})(\frac{\pi}{2},\pi)=\begin{pmatrix} -\frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2)>0 & 0 \\ 0 & -mgR+(h-m\omega^2)R^2 \end{pmatrix}$$

é stabile per il teorema dell'Hessiano non degenere se $(h-m\omega^2)R>mg$, cioè se $\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}<1$.

In altre parole si ha la *stabilità* di $(\frac{\pi}{2},\pi)$ se e soltanto se si ha l'*esistenza* delle altre due soluzioni $\theta_{3,4}$.

Nel caso in cui queste due esistano, esse saranno instabili, infatti

$$\mathcal{H}(\mathcal{U})(\frac{\pi}{2},\theta_3)=\begin{pmatrix} -\frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2)>0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial\theta^2}_{|\theta=\theta_3} \end{pmatrix}$$

Dove,

$$\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial\theta^2}(\theta_3)=-\left(h-m\omega^2\right)R^2\sin^2(\theta_{3,4})<0$$

Risulta tutto più chiaro mostrando il grafico di $\mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2},\theta\right)$ e del corrispondente ritratto in fase:

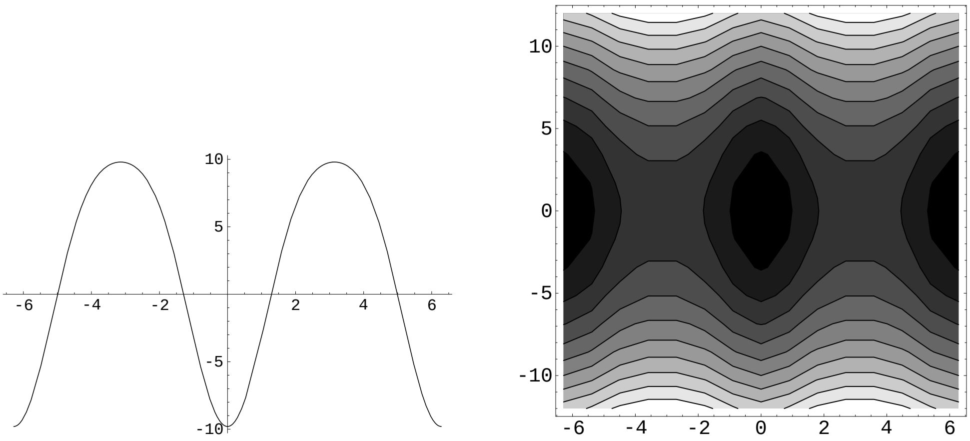


Figura 1: $\mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2},\theta\right)$ ed $E=\frac{\dot{\theta}^2}{2}+\mathcal{U}$, quando $\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}\geq 1$

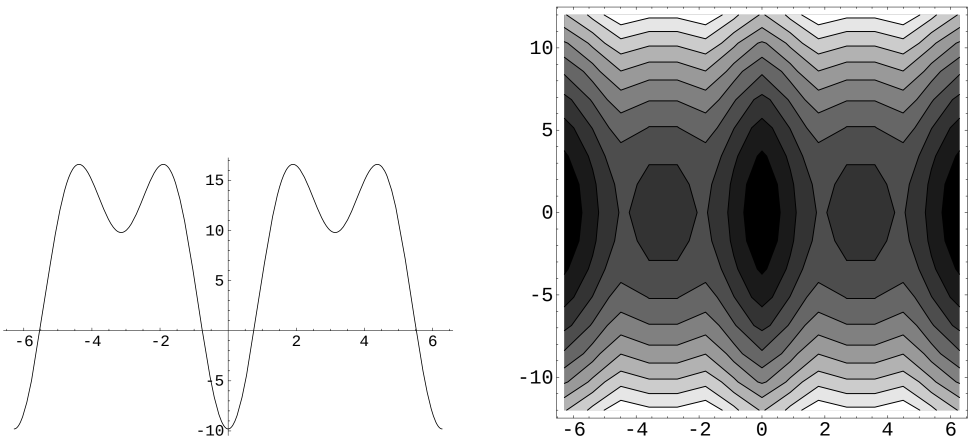


Figura 2: $\mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2},\theta\right)$ ed $E=\frac{\dot{\theta}^2}{2}+\mathcal{U}$, quando $\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}< 1$

$\square$