

Funzioni Generatrici e Riduzioni a Finiti Parametri

Alberto Lovison

November 18, 2004

Introduzione: Funzioni generatrici

Integrali Oscillanti

Preliminari

Assenza di Punti Critici

Punti critici Morse

Riduzioni in Teoria dei Campi

Preliminari

Tecnica di riduzione

Esistenza di soluzioni

Analisi Numerica

Implementazione della riduzione

Ricerca di soluzioni

Eikonal equation

Problema di Cauchy H–J

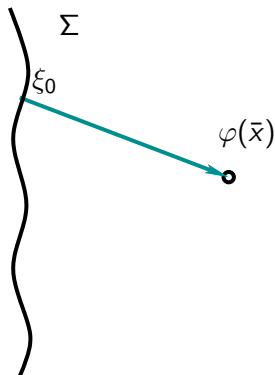


$\varphi(\bar{x})?$
•

$$\begin{cases} |\nabla\varphi(x)| = n^2(x), \\ \varphi|_{\Sigma} = 0. \end{cases}$$

Eikonal equation

Metodo delle **bicaratteristiche**:



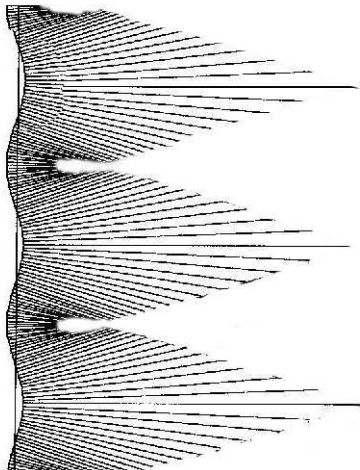
risolvere le equazioni canoniche

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = n(x)\nabla n(x). \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

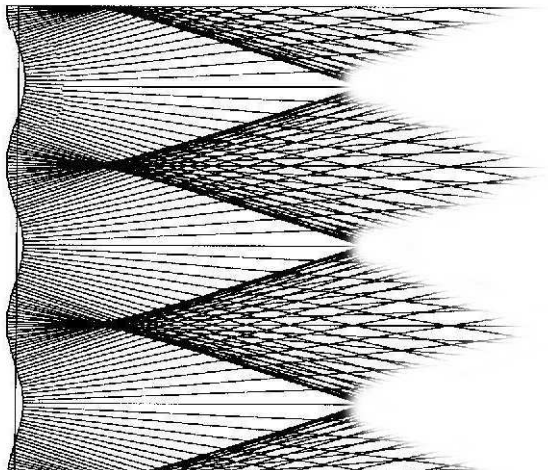
integrare la optical length
lungo un raggio.

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(\xi_0) + \int_0^{\tau} n^2(x(t)) dt.$$

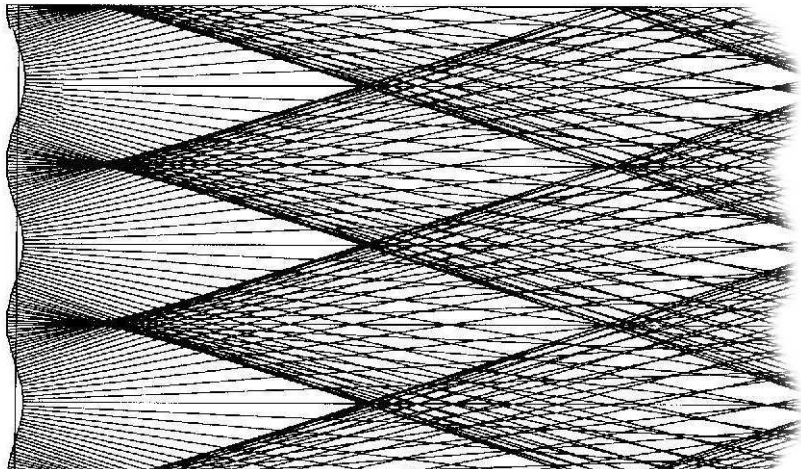
Eikonal equation



Eikonal equation

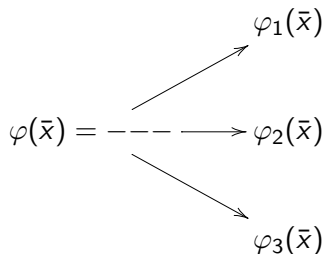
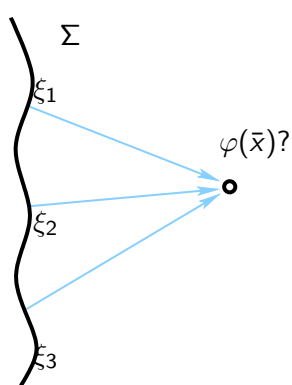


Eikonal equation



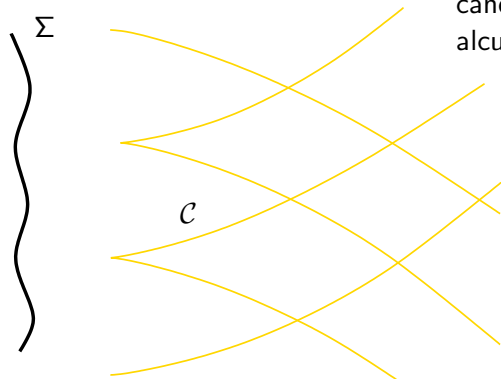
Problemi

1-Multivocità:



Problemi

2-Caustica:



Lungo la caustica la varietà
candidata non è grafico di
alcunché, Dini fallisce.

Proposta: Funzioni Generatrici

aggiungiamo dei parametri ausiliari

$$\varphi(x) \xrightarrow{\sim} \varphi(x; \mathbf{u}) \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$$

Proposta: Funzioni Generatrici

aggiungiamo dei parametri ausiliari

$$\varphi(x) \xrightarrow{\sim} \varphi(x; \mathbf{u}) \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$$

I valori ammissibili per $\varphi(x)$ sono i **valori u -critici** con x fissato:

$$\varphi_j(x) = \varphi(x, u_j) \text{ tale che } \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}(x, u_j) = 0.$$

1. formulazione unificata
2. caustica “desingularizzata”

Globalizzazione

Domanda: Esiste sempre una funzione generatrice globale? Se esiste, quanti parametri sono necessari?

Globalizzazione

Domanda: Esiste sempre una funzione generatrice globale? Se esiste, quanti parametri sono necessari?

Risposta: Il funzionale **lunghezza ottica** è globale, ma è definito su uno spazio di curve:

$$J(x, \xi; \gamma(\cdot)) = \int_{\gamma} n^2(t) dt, \quad \xi \in \Sigma, \gamma(0) = \xi, \gamma(\tau) = x,$$

N.B. abbiamo ∞ parametri!.

Come procedere?

È possibile **ridurre** il numero dei parametri
e allo stesso tempo conservare
il carattere **globale**?

Ottica ondulatoria

Integrale Oscillante

$$I(x; \kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(x, u))g(x, u)du,$$

Ottica ondulatoria

Integrale Oscillante

$$I(x; \kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(x, u))g(x, u)du,$$

- ▶ $\kappa \rightarrow \infty$ grande parametro (numero d'onda)

Ottica ondulatoria

Integrale Oscillante

$$I(x; \kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(x, u))g(x, u)du,$$

- ▶ $\kappa \rightarrow \infty$ grande parametro (numero d'onda)
- ▶ $\varphi(x, u)$ funzione fase

Ottica ondulatoria

Integrale Oscillante

$$I(x; \kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(x, u))g(x, u)du,$$

- ▶ $\kappa \rightarrow \infty$ grande parametro (numero d'onda)
- ▶ $\varphi(x, u)$ funzione fase
- ▶ $g(x, u)$ funzione ampiezza

Ottica ondulatoria

Integrale Oscillante

$$I(x; \kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(x, u))g(x, u)du,$$

- ▶ $\kappa \rightarrow \infty$ grande parametro (numero d'onda)
- ▶ $\varphi(x, u)$ funzione fase
- ▶ $g(x, u)$ funzione ampiezza

Se $I(x; \kappa)$ risolve **Helmholtz**: $\Delta_x I + k^2 n^2(x)I = 0$
allora $\varphi(x; u)$ “genera” una soluzione per **Eikonal** $|\nabla\varphi| = n^2$.
 φ è una funzione generatrice!

Asymptotics

la centralità del ruolo dei punti u -critici risiede nel
Principio della Fase Stazionaria

Asymptotics

la centralità del ruolo dei punti u -critici risiede nel
Principio della Fase Stazionaria

1. assenza di punti
critici
 x è in **ombra**

▶ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x; u) \neq 0 \quad \forall u$
 $I(\kappa) \rightarrow 0$ Illuminazione **svanisce**

Asymptotics

la centralità del ruolo dei punti u -critici risiede nel
Principio della Fase Stazionaria

1. assenza di punti critici
 x è in **ombra**
2. punti critici Morse
raggi

- ▶ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x; u) \neq 0 \quad \forall u$
 $I(\kappa) \rightarrow 0$ Illuminazione **svanisce**
- ▶ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x; \bar{u}) = 0 \quad \det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(x; \bar{u}) \right) \neq 0$
 $I(x; \kappa) \simeq \tilde{a}(x, \bar{u}) \exp(i\kappa \varphi(x; \bar{u}))$
Illum. **indipendente** da κ

Asymptotics

la centralità del ruolo dei punti u -critici risiede nel
Principio della Fase Stazionaria

1. assenza di punti critici
 x è in **ombra**
 - ▶ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x; u) \neq 0 \quad \forall u$
 $I(\kappa) \rightarrow 0$ Illuminazione **svanisce**
2. punti critici Morse
raggi
 - ▶ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x; \bar{u}) = 0 \quad \det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(x; \bar{u}) \right) \neq 0$
 $I(x; \kappa) \simeq \tilde{a}(x, \bar{u}) \exp(i\kappa \varphi(x; \bar{u}))$
Illum. **indipendente** da κ
3. punti critici degeneri
caustiche
 - ▶ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x; u) = 0 \quad \det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(x; u) \right) = 0$
 $I(x; \kappa) \simeq \kappa^S$ Illum. **diverge** con κ

Primo risultato: Assenza di Punti Critici

$$I(\kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(u))g(u)du,$$

Risultato classico: decadimento polinomiale

$$|I(\kappa)| \leq A_N \kappa^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

- ▶ se g e φ fossero analitiche, avrei $A_N \simeq N!$
- ▶ se g è a supporto compatto non abbiamo stime su A_N

Primo risultato: Assenza di Punti Critici

$$I(\kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(u))g(u)du,$$

Risultato classico: decadimento polinomiale

$$|I(\kappa)| \leq A_N \kappa^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

- ▶ se g e φ fossero analitiche, avrei $A_N \simeq N!$
- ▶ se g è a supporto compatto non abbiamo stime su A_N

Introduciamo le funzioni di Gevrey:

$$g \in G^\sigma : \quad \left| g^{(\alpha)} \right| \leq C^{\alpha+1} (\alpha!)^\sigma$$

$$\mathcal{A} = G^1 \subseteq G^\sigma \subseteq G^\infty = C^\infty$$

Se $\sigma > 1$, g può anche essere a supporto compatto, inoltre si può fare la partizione dell'unità.

Primo risultato: Assenza di Punti Critici

$$I(\kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(u))g(u)du,$$

$$|I(\kappa)| \leq A_N \kappa^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

essendo $A_N \propto g^{(\alpha)}$,

posso scegliere N **ottimale** al tendere di κ all' ∞ .
(Troncamento ottimale di Poincaré).

Primo risultato: Assenza di Punti Critici

$$I(\kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(u))g(u)du,$$

$$|I(\kappa)| \leq A_N \kappa^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

essendo $A_N \propto g^{(\alpha)}$,

posso scegliere N **ottimale** al tendere di κ all' ∞ .
(Troncamento ottimale di Poincaré).

Applicando la formula di Stirling:

$$|I(\kappa)| \leq A \exp(-\kappa^{\frac{1}{\sigma}}),$$

Decadimento **esponenziale**.

Secondo Risultato: Punti critici di Morse

$$I(\kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(u))g(u)du,$$

Unico punto critico \bar{u} non degenerare (Morse).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x; \bar{u}) = 0 \quad \det \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(x; \bar{u}) \right) \neq 0$$

Risultato classico: Fase Stazionaria

$$I(\kappa) \asymp \tilde{a}(\bar{u}) \exp(i\kappa\varphi(\bar{u}))$$

Secondo Risultato: Punti critici di Morse

$$I(\kappa) = \int_{\Omega} \exp(i\kappa\varphi(u))g(u)du,$$

Unico punto critico \bar{u} non degenerare (Morse).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x; \bar{u}) = 0 \quad \det \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(x; \bar{u}) \right) \neq 0$$

Risultato classico: Fase Stazionaria

$$I(\kappa) \asymp \tilde{a}(\bar{u}) \exp(i\kappa\varphi(\bar{u}))$$

Risultato nuovo: **perdita di regolarità** Gevrey

$$g(u) \in G^{\sigma} \Rightarrow I(\kappa) \in G^{2\sigma-1}$$

N.B. Se $\sigma = 1$, allora $2\sigma - 1 = \sigma$, nessuna perdita

Se $\sigma > 1$, allora $2\sigma - 1 = \sigma + \sigma - 1 > \sigma$, perdita di $\sigma - 1$

Un problema di Dirichlet semilineare

Consideriamo

$$\begin{cases} -Lu = F(u) & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

Un problema di Dirichlet semilineare

Consideriamo

$$\begin{cases} -Lu = F(u) & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

dove

- ▶ $u \in H_0^1(\Omega)$
- ▶ L ellittico
- ▶ F nonlineare

Un problema di Dirichlet semilineare

Consideriamo

$$\begin{cases} -Lu = F(u) & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

dove

- ▶ $u \in H_0^1(\Omega)$
- ▶ L ellittico
- ▶ F nonlineare

Autospettro di L

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$
$$-L\hat{u}_j = \lambda_j \hat{u}_j$$

Operatore inverso di $-L$

$$gv := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_j}{\lambda_j} \hat{u}_j$$

si verifica facilmente che

$$-Lgv = g(-L)v = v$$

Operatore inverso di $-L$

$$gv := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_j}{\lambda_j} \hat{u}_j$$

si verifica facilmente che

$$-Lgv = g(-L)v = v$$

cambio variabile nella PDE non lineare

$$-Lu = F(u)$$

$$-Lgv = F(gv)$$

$$v = F(gv)$$

Proiezione sugli Autospazi

Proiettiamo $v = F(gv)$ sui singoli $\langle \hat{u}_j \rangle$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \langle F(gv), v_1 \rangle \\ v_2 &= \langle F(gv), v_2 \rangle \\ &\vdots \\ v_m &= \langle F(gv), v_m \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} v_{m+1} &= \langle F(gv), v_{m+1} \rangle \\ &\vdots \end{aligned} \right\}$$

Proiezione sugli Autospazi

Proiettiamo $v = F(gv)$ sui singoli $\langle \hat{u}_j \rangle$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \langle F(gv), v_1 \rangle \\ v_2 &= \langle F(gv), v_2 \rangle \\ &\vdots \\ v_m &= \langle F(gv), v_m \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$\mu = \mathbb{P}_m F(g(\mu + \eta))$$

equazione **"finita"** ($\mu \in \mathbb{R}^m$)

$$\left. \begin{aligned} v_{m+1} &= \langle F(gv), v_{m+1} \rangle \\ &\vdots \end{aligned} \right\}$$

$$\eta = \mathbb{Q}_m F(g(\mu + \eta))$$

equazione **infinita** ($\eta \in \mathbb{R}^\infty$)

Contrazione

Analizziamo l'equazione infinita
la mappa:

$$\eta \mapsto \mathbb{Q}_m F(g(\mu + \eta)) \quad \mu \text{ fissato} \quad (*)$$

- ▶ **Assumiamo** F Lipschitziana
- ▶ Consideriamo m sufficientemente grande

Contrazione

Analizziamo l'equazione infinita
la mappa:

$$\eta \mapsto \mathbb{Q}_m F(g(\mu + \eta)) \quad \mu \text{ fissato} \quad (*)$$

- ▶ **Assumiamo** F Lipschitziana
 - ▶ Consideriamo m sufficientemente grande
- ⇒ $(*)$ è contrattiva:
- ▶ esiste un **unico** punto fisso
 - ▶ esiste una unica soluzione $\eta = \tilde{\eta}(\mu)$ della equazione infinita

Sostituzione nella equazione finita

Sostituendo il punto fisso nella equazione di “biforcazione” si trova una equazione effettivamente finito dimensionale

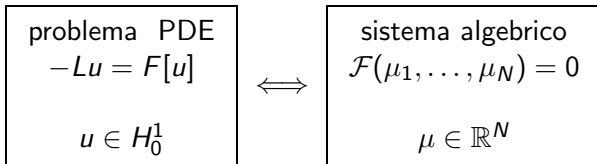
$$\mu = \mathbb{P}_m F(g(\mu + \tilde{\eta}(\mu))), \quad \mu \in \mathbb{R}^m$$

Sostituzione nella equazione finita

Sostituendo il punto fisso nella equazione di “biforcazione” si trova una equazione effettivamente finito dimensionale

$$\mu = \mathbb{P}_m F(g(\mu + \tilde{\eta}(\mu))), \quad \mu \in \mathbb{R}^m$$

La PDE originale diventa (globalmente) equivalente a un sistema non lineare in m variabili



Formulazione Variazionale

Se $F'(u)$ è L^2 -simmetrico,
per il teorema di Volterra–Vainberg
si può scrivere un principio variazionale

$$J(u) := \int_{t=0}^{t=1} ((-L - F) \circ (tu), u) dt$$

equivalente al problema di Dirichlet originale

Formulazione Variazionale

Se $F'(u)$ è L^2 -simmetrico,
per il teorema di Volterra–Vainberg
si può scrivere un principio variazionale

$$J(u) := \int_{t=0}^{t=1} ((-L - F) \circ (tu), u) dt$$

equivalente al problema di Dirichlet originale
Applichiamo la riduzione anche al principio variazionale:

$$W(\mu) := J(\tilde{u}(\mu)) = J(g(\mu + \tilde{\eta}(\mu)))$$

basta cercare i punti critici di una funzione di m variabili.

Risultato di Esistenza

Consideriamo il caso (un po' più generale)

$$-Lu = \lambda u + F(u), \quad \lambda \neq \lambda_j$$

con F operatore di Nemitski

$$F[u](x) = f(u(x)), \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $f, \int f(u)du, f'$ sono limitate

(e.g. f a supporto compatto, oppure $f(x) = \sin(x)$)

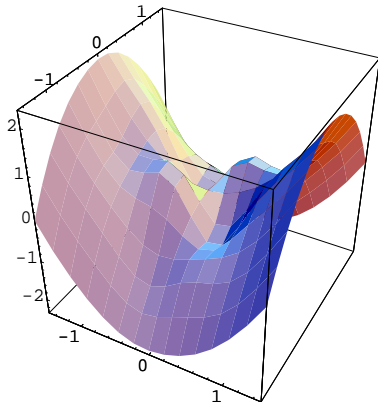
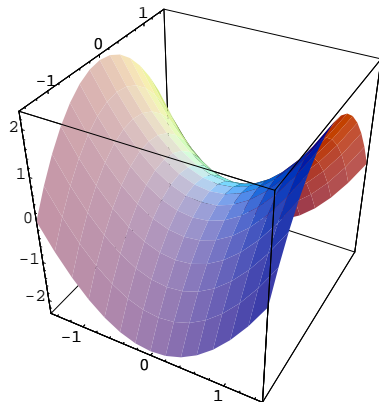
si verifica che il funzionale ridotto $W(\mu)$ è **quasi-quadratico**

$$|W - Q|_{C^1} = |W - Q| + |W' - Q'| \leq C$$

esiste sempre almeno un punto critico per W , cioè una soluzione del problema di Dirichlet.

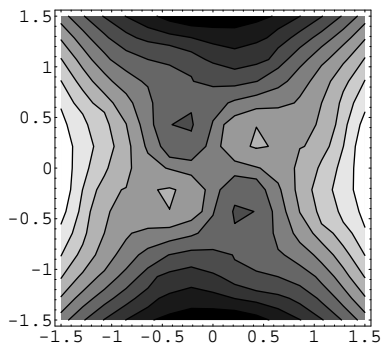
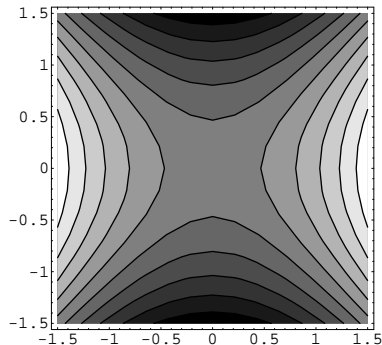
Quasi Quadratiche

Teoria di Lusternik–Schnirelmann e delle FGQI



Quasi Quadratiche

Teoria di Lusternik–Schnirelmann e delle FGQI



Implementazione della riduzione con elementi finiti

caso generale $-Lu = F(u) \quad u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$

caso particolare:

- ▶ $\Omega = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$
- ▶ $L = \Delta$ Laplaciano, cioè $\frac{d^2}{dx^2}$
- ▶ $F(u) = 30(1 - e^{-u^2/2})$

Implementazione della riduzione con elementi finiti

caso generale $-Lu = F(u) \quad u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$

caso particolare:

- ▶ $\Omega = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$
- ▶ $L = \Delta$ Laplaciano, cioè $\frac{d^2}{dx^2}$
- ▶ $F(u) = 30(1 - e^{-u^2/2})$

Operiamo una discretizzazione con $n = 640$ nodi, cosicché

$$H_0^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{640}$$

Una stima della costante contrattiva sulla coda suggerisce

$$m = 2 \quad M \cong 0.205$$

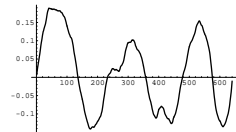
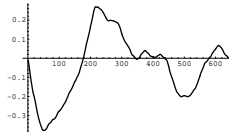
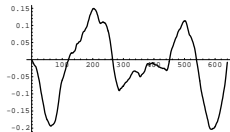
Test di convergenza sulle code

Consideriamo $\mu = (0, 10)$ fissato e prendiamo η random

Test di convergenza sulle code

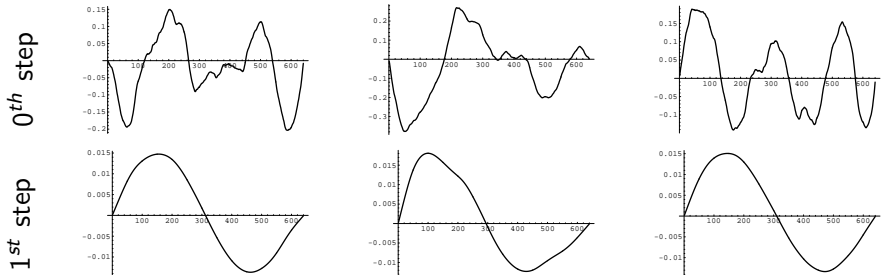
Consideriamo $\mu = (0, 10)$ fissato e prendiamo η random

0^{th} step



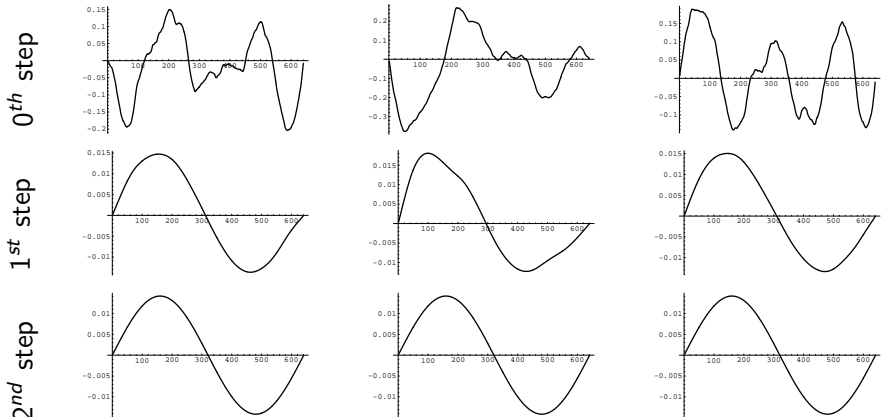
Test di convergenza sulle code

Consideriamo $\mu = (0, 10)$ fissato e prendiamo η random

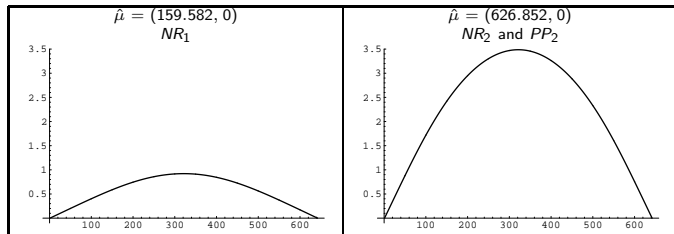


Test di convergenza sulle code

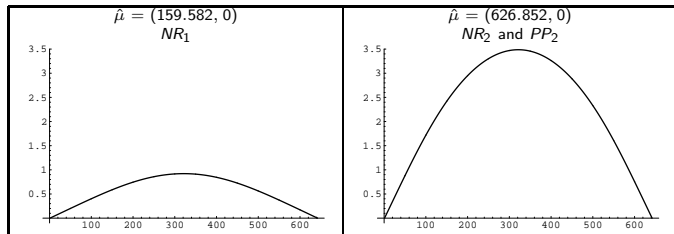
Consideriamo $\mu = (0, 10)$ fissato e prendiamo η random



Peano–Picard e Newton–Raphson



Peano–Picard e Newton–Raphson

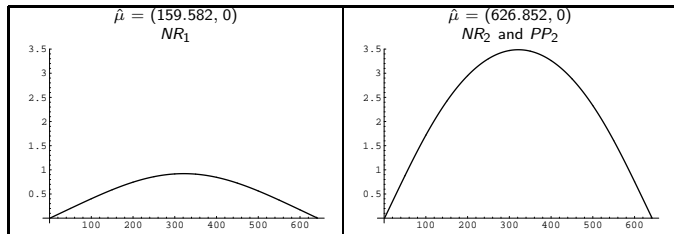


Nota: Newton–Raphson è migliore!

è più rapida

trova una soluzione in più

Peano–Picard e Newton–Raphson



Nota: Newton–Raphson è migliore!

è più rapida

trova una soluzione in più

ma ha bisogno della derivata del punto fisso:

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mu}$$

che è garantita

dalla tecnica di riduzione.