ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Generalità

1.1. **Verifica delle soluzioni.** Verificare se le funzioni date sono soluzioni delle equazioni differenziali.

(1)
$$xy' = 2y, \qquad y = 5x^2.$$

(2)
$$y' = x^2 + y^2, \qquad y = \frac{1}{x}.$$

(3)
$$\frac{dx^2}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$
$$x = C_1 \cos \omega t + C_1 \sin \omega t.$$

(4)
$$y'' - 2y' + y = 0,$$
$$y = xe^x, \quad y = x^2 e^x.$$

(5)
$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0,$$
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

(6)
$$(x - 2y)y' = 2x - y,$$
$$x^2 - xy + y^2 = C^2.$$

(7)
$$(x - 2y)y' = 2x - y,$$
$$y = x + Ce^y.$$

(8)
$$(xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0,$$
$$y = \log(xy).$$

1.2. **Equazioni differenziali di famiglie di curve.** (1-6): Trovare l'equazione differenziale soddisfatta dalla famiglia parametrica di curve data. (7-10): Trovare l'equazione differenziale della famiglia. Determinare la soluzione particolare che soddisfa alle condizioni iniziali indicate.

(1)
$$y = Cx.$$
(2)
$$y = Cx^2.$$
(3)
$$x^2 + y^2 = C^2.$$
(4)
$$\log \frac{x}{y} = 1 + ay.$$
(5)
$$(y - y_0)^2 = 2px.$$
(6)
$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3.$$
(7)
$$x^2 - y^2 = C, \quad y(0) = 5.$$
(8)
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x},$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$
(9)
$$y = C_1 \sin(x - C_2),$$
$$y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0.$$
(10)
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x},$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2.$$

1.3. **Equazioni differenziali del 1^o ordine a variabili separabili.** Risolvere le seguenti equazioni differenziali, eventualmente con l'aiuto di una sostituzione lineare $y \to u = ax + by + c$

(1)
$$xy' - y = y^3$$
(2)
$$xyy' = 1 - x^2.$$
(3)
$$y - xy' = a(1 + x^2 y').$$
(4)
$$y' \tan x = y.$$
(5)
$$(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1.$$
(6)
$$y' \sin x = y \log y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$
(7)
$$y' = (x + y)^2.$$
(8)
$$y' = (8x + 2y + 1)^2.$$
(9)
$$y' = \frac{2x - y}{4x - 2y + 3}$$

2. L'equazione differenziale lineare del 1^o ordine. Variazione delle costanti arbitrarie.

2.1. **Richiamo di teoria.** L'equazione del primo ordine

$$y' + P(t)y = Q(t), \tag{N.O.}$$

è di grado 1 nella y' e nella y, pertanto si chiama *equazione lineare*. La presenza di un termine "noto" $Q(t)$ la rende una equazione *non omogenea* (N.O.), nel senso che dato un $\lambda \in \mathbb{R}^>$ qualsiasi, la sostituzione $y(t) \to \lambda y(t)$ non restituisce una equazione equivalente.

L'equazione si affronta prendendo prima in considerazione l'equazione *omogenea associata* (O.A.):

$$\text{(O.A.)} \qquad y' + P(t)y = 0.$$

In questo caso le variabili sono separabili, integrando si ottiene:

$$\text{(I.G.O.A.)} \qquad y_{OA}(t) := Ce^{-\int P(t)dt},$$

dove con $\int P(t)dt$ si intende una primitiva *qualsiasi* di $P(t)$.

L'equazione completa non omogenea (N.O.) si risolve con il *metodo di Lagrange*, detto anche *variazione delle costanti arbitrarie* (V.C.A.). Si prende la costante C in (I.G.O.A.) e la si pensa come funzione della t anche essa $C \to C(t)$. Poi si sostituisce nel membro di sinistra di (N.O.), trovando

$$(1) \qquad y' + Py = C'e^{-\int P(t)dt} + C(-P)e^{-\int P(t)dt} + PCe^{-\int P(t)dt} = C'e^{-\int P(t)dt}.$$

Questo deve essere uguagliato al membro di destra, cioè

$$(2) \qquad C'(t)e^{-\int P(t)dt} = Q(t) \qquad \Rightarrow \qquad C'(t) = e^{\int P(t)dt}Q(t),$$

pertanto

$$(3) \qquad \boxed{y_{\text{IGNO}}(t) := e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)dt + cost\right).}$$

Risolvere le seguenti equazioni:

(1)
$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t}, \quad (t > 0).$$

(2)
$$y' + \frac{3}{t}y = \frac{\sin t}{t^3}, \quad (t < 0).$$

(3)
$$y' + \frac{2}{t}y = e^t, \quad (t > 0).$$

(4)
$$y' - \tan(t)y = \cos t.$$

(5)
$$y' + \frac{2y}{x} = x^3.$$

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(1)
$$y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1.$$

(2)
$$y' + \frac{y}{t} = \frac{e^t}{t}, \quad y(1) = 1.$$

(3)
$$y' = -\frac{\sin 2t}{\cos 3y}, \quad y(\pi/2) = \pi/3.$$

(4)
$$y' + \frac{2y}{t} = t - 1 + \frac{1}{t}, \quad y(1) = 1/2.$$

(5)
$$y' = \frac{ty^3}{\sqrt{1+t^2}} \quad y(0) = 1.$$

3. Equazioni lineari a coefficienti costanti del 2^o ordine

Consideriamo l'equazione lineare del secondo ordine

$$y'' + py' + qy = f(t) \tag{4}$$

dove i coefficienti p, q sono costanti reali.

3.0.1. *Soluzione della omogenea associata.* Si risolve per cominciare l'equazione omogenea associata:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5}$$

per la quale si prova una soluzione della forma $e^{\lambda t}$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è da determinarsi. Sostituendo si arriva all'equazione (algebrica) caratteristica:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{6}$$

(l'altro fattore $e^{\lambda t}$ non si annulla mai). Qui consideriamo tre casi, (verificare le conclusioni per esercizio):

(i) radici reali e distinte, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. L'integrale generale della omogenea associata è allora dato da:

$$y_{\text{IGOA}} := C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{7}$$

(ii) radici reali e coincidenti, $\lambda_1 = \lambda_2$. Le $e^{\lambda_{1,2} t}$ non generano più uno spazio di dimensione 2. Si verifica che $te^{\lambda_1 t}$ è la soluzione mancante cercata:

$$y_{\text{IGOA}} := C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}. \tag{8}$$

(iii) $\lambda_{1,2}$ radici complesse e coniugate, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. L'integrale generale è allora dato da:

$$y_{\text{IGOA}} := e^{\alpha t} \left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t) \right). \tag{9}$$

3.0.2. *Soluzione dell'equazione non omogenea completa.* Il metodo universale sempre valido è il metodo di Lagrange della variazione delle costanti arbitrarie. Nell'integrale generale della omogenea associata, si considerano le C_1 e C_2 come funzioni $C_1(t)$, $C_2(t)$ invece che costanti. Sostituendo nell'equazione completa si ottengono delle equazioni per queste funzioni. Così si ricava una *soluzione particolare* y_p. L'integrale generale della non omogenea si ottiene allora sommando a questa soluzione particolare l'integrale generale della omogenea associata trovato sopra.

$$y_{\text{IGNO}} := y_{\text{IGOA}} + y_p. \tag{10}$$

Illustriamo alcune regole più rapide per trovare la soluzione particolare che vanno sotto il nome di **metodo dei coefficienti indeterminati**.

(1) $f(t) = e^{at} P_n(t)$, con P_n polinomio di grado n.
- se $a \neq \lambda_{1,2}$, cioè non risolve l'equazione caratteristica, si prova con una soluzione della forma:

  $$y_p = e^{at} Q_n(t)$$

  dove Q_n è un polinomio di grado n con coefficienti da determinarsi.

- se $a = \lambda_{1,2}$, si prova con:
$$y_p = t^r e^{at} Q_n(t)$$
dove r è la molteplicità di a come soluzione dell'equazione caratteristica.

(2) $f(t) = e^{at}\left(P_n(t)\cos(bt) + Q_m(t)\sin(bt)\right)$.
- se $a + ib \neq \lambda_{1,2}$, cioè non risolve l'equazione caratteristica, si prova con una soluzione della forma:
$$y_p = e^{at}\left(S_N(t)\cos(bt) + T_N(t)\sin(bt)\right)$$
dove $N = \max n, m$.
- se $a \pm ib$ sono soluzioni dell'equazione caratteristica si prova con:
$$y_p = t^r e^{at}\left(S_N(t)\cos(bt) + T_N(t)\sin(bt)\right)$$
dove r è la molteplicità di $a + ib$ come soluzione dell'equazione caratteristica (per le eq. di ordine 2 può essere solo $r = 1$).

Esempio 1. Trovare l'integrale generale della seguente
$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}.$$

Svolgimento:

(OA) $$2y'' - y' - y = 0.$$

(EQ.CHAR.) $$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = 1, -\frac{1}{2}$$

(IGOA) $$y_{igoa}(t, C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

$f(x) = 4xe^{2x}$, con $2 \neq 1, -\frac{1}{2}$, quindi proviamo con

(11) $$y_p(t) = e^{2x}\left(Ax + B\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo nella *n.o.* si trova

(12) $$2y_p'' - y_p' - y_p = e^{2x}\left(5Ax + 5B + 7A\right).$$

Dovendo essere $e^{2x}\left(5Ax + 5B + 7A\right) = f(x)$ si trova che $A = \frac{4}{5}$ e $B = -\frac{28}{25}$ e in definitiva:

(13) $$y_{igno}(t, C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

□

Esempio 2. Trovare l'integrale generale della seguente

(14) $$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Svolgimento.

(15) $$y_{\text{IGNO}}(t, C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

□

Esempio 3. Trovare l'integrale generale della seguente

$$y'' + y = x \sin x. \tag{16}$$

Svolgimento.

$$y_{\text{IGOA}}(t, C_1, C_2) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \tag{17}$$

Si prova con una soluzione particolare della forma:

$$y_p = xe^{0x}\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) \tag{18}$$

in definitiva:

$$y_{\text{IGNO}}(t, C_1, C_2) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x. \tag{19}$$

□

(3) **Principio di sovrapposizione.** Se il secondo membro $f(t)$? somma di pi? funzioni

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t), \tag{20}$$

e se le $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sono soluzioni particolari delle

$$y_1''(t) + py_1'(t) + qy_1(t) = f_1(t),$$
$$y_2''(t) + py_2'(t) + qy_2(t) = f_2(t),$$
$$\cdots = \ldots y_n''(t) + py_n'(t) + qy_n(t) = f_n(t),$$

allora $y_p = y_1 + \cdots + y_n$ risolve la

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t). \tag{21}$$

Esempio 4. Trovare l'integrale generale delle seguenti

$$y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos(2x). \tag{22}$$

$$y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x. \tag{23}$$

3.0.3. *Esercizi.* Trovare gli integrali generali per le seguenti:

(1)
$$y'' - 4y' + ay = x^2.$$

(2)
$$y'' - y' + y = x^3 + 6.$$

(3)
$$y'' + 2y' + y = e^{2x}$$

(4)
$$y'' + y' - 6y = xe^{2x}.$$

(5)
$$y'' - 2y' + y = \sin x + \sinh x.$$

(6) Trovare la soluzione della
$$y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1,$$
che verifica le condizioni:
$$y = \frac{1}{8}, y' = 1, \text{per } x = 0.$$

(7)
$$y'' - y = 2x \sin x.$$

(8)
$$y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x).$$