ESERCIZI ASSEGNATI IN CLASSE

INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO A. A. 2011/2012
LUCA ROSSI

1. Prima settimana

Esercizio 1.1. Dimostrare che, dati due insiemi A, B, si ha:

- *(leggi di De Morgan)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$.

Esercizio 1.2. Trovare CN e CS su $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ affinché $\psi \circ \varphi$ sia iniettiva oppure suriettiva.

Esercizio 1.3. Ricordiamo che la scrittura $|A| \le |B|$ (*risp.* $|A| \ge |B|$) significa: "A ha cardinalità inferiore (*risp. superiore*) o uguale a B". Dimostrare che:

- $|A| \le |B| \iff |B| \ge |A|$;
- $|A| \le |B|,\ |B| \le |C| \Rightarrow |A| \le |C|$;
- $A \subset B \Rightarrow |A| \le |B|$.

Esercizio 1.4. Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Dimostrare che m/n è un allineamento decimale periodico.

Esercizio 1.5. Discutere la validità delle seguenti implicazioni:

$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\quad a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,

$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a\cdot b \in \mathbb{Q}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \Rightarrow a\cdot b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\quad a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \Rightarrow a\cdot b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Esercizio 1.6. Dimostrare la disuguaglianza triangolare e la sua conseguenza:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| \le |x| + |y|;$$
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \big||x| - |y|\big| \le |x - y|.$$

(*suggerimento per la seconda:* applicare la prima con $x = x - y$ e $y = y$).

Esercizio 1.7. Determinare inf, sup e (se esistono) min, max dei seguenti insiemi:

$$A = (1, 3], \qquad (-\infty, 5] \cup (3, 7), \qquad (2, +\infty) \cup \{-1\}.$$

2. Seconda settimana

Esercizio 2.1. Dimostrare che

$$\sup A = x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x \text{ è maggiorante di } A \\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a \in A \ :\ a > x - \varepsilon. \end{cases}$$

Esercizio 2.2. Ricordando che un insieme A è denso in $\mathbb{R}$ se $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ si ha che $(a, b) \cap A \neq \emptyset$, dimostrare le seguenti equivalenze:

$$A \text{ è denso in } \mathbb{R} \iff \forall\, a < b, \quad (a, b) \cap A \ \text{ è un insieme infinito;}$$
$$A \text{ è denso in } \mathbb{R} \iff \forall\, \delta > 0, \quad \bigcup_{x \in A} (x - \delta, x + \delta) = \mathbb{R}.$$

Esercizio 2.3. Dimostrare che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 1$ si ha $\alpha^n > n$ definitivamente. (*suggerimento:* trovare $m \in \mathbb{N} : \alpha^m > \frac{2}{\alpha-1}$; minorare α^{m+n}; applicare la disuguaglianza di Bernoulli a α^n; concludere).

Esercizio 2.4. Sia $f(x) = 9 - x^2 + 2x$. Trovare un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ tale che $f\big|_I$, $f\big|_{\mathbb{R}\setminus I}$ siano iniettive. Determinarne le inverse.

Esercizio 2.5. Dimostrare che f è strettamente crescente [decrescente] $\Leftrightarrow$ f^{-1} è strettamente crescente [decrescente].

Esercizio 2.6. Dimostrare quali implicazioni valgono tra le proprietà "f iniettiva" e "f strettamente monotona".

Esercizio 2.7. Dimostrare che

$$f \text{ crescente, } g \text{ crescente [decrescente]} \Rightarrow g \circ f \text{ e } f \circ g \text{ crescenti [decrescenti].}$$

3. Terza settimana

Esercizio 3.1. Dimostrare che $+\infty$ è di accumulazione per E $\Leftrightarrow$ E non è superiormente limitato.

Esercizio 3.2. Dimostrare usando la definizione che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Esercizio 3.3. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}.$$

Esercizio 3.4. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ ed esiste un intorno U di x_0 tale che $g\big|_{X\cap U\setminus\{x_0\}}$ è limitata. Dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

4. Quarta settimana

Esercizio 4.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione crescente ed inferiormente illimitata. Dimostrare che $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

Esercizio 4.2. Sia $a \in \mathbb{R}$. Sapendo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{2^x} = 0$, dimostrare che

$$\forall a \in \mathbb{R},\ a > 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

(*suggerimento:* utilizzare l'identità $a^x = 2^{x \log_2 a}$).

5. Quinta settimana

Esercizio 5.1. Sapendo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, determinare, per $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha}.$$

Esercizio 5.2. In quali dei seguenti casi è possibile stabilire se la successione $\{x_n + y_n\}$ converga, diverga o non ammetta limite?

(1) $\{x_n\}$ converge, $\{y_n\}$ non ammette limite;
(2) $\{x_n\}$ diverge, $\{y_n\}$ non ammette limite;
(3) $\{x_n\}$ converge, $\{y_n\}$ è limitata;
(4) $\{x_n\}$ diverge, $\{y_n\}$ è limitata;
(5) $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ non ammettono limite.

Dimostrarlo.

6. Sesta settimana

Esercizio 6.1. Dimostrare che non esiste

$$\lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x}.$$

Esercizio 6.2. Dimostrare o falsificare la seguente implicazione:

$$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

7. Settima settimana

Esercizio 7.1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 - 7k\sin k}{k^5 \ln k + 5}.$$

Esercizio 7.2. Determinare, giustificandolo, i punti di discontinuità della funzione indicatrice di $\mathbb{Q}$.

Esercizio 7.3. Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Dimostrare che

$$f(I) \supset \left(\inf_I f, \sup_I f\right).$$

8. Ottava settimana

Esercizio 8.1. Sia $f : [a,b] \to [a,b]$ continua. Dimostrare che ammette almeno un punto fisso, cioè che $\exists x \in [a,b]$ tale che $f(x) = x$.

Esercizio 8.2. dimostrare che se f e g sono derivabili in x_0 allora lo è anche $f+g$ e vale $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Esercizio 8.3. Calcolare la derivata delle funzioni arcsin e arccos.

9. Nona settimana

Esercizio 9.1. Mostrare che se f è strettamente monotona e derivabile in (a,b) non necessariamente $f' > 0$ in (a,b).

Esercizio 9.2. Definire la funzione $x^2 \sin \frac{1}{x}$ in $x = 0$ in modo da ottenere una funzione continua. Tale funzione è derivabile in 0?

10. Decima settimana

Esercizio 10.1. Dimostrare o falsificare la seguente implicazione:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ \Rightarrow\ y = ax + b \text{ è asintoto obliquo destro per } f.$$

Esercizio 10.2. Dimostrare che il polinomo di McLaurin della funzione sin è dato da

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

e quello della funzione cos da

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Esercizio 10.3. Ritrovare, usando i limiti notevoli, i seguenti sviluppi:

$$\sin x = x + o(x), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad e^x = 1 + x + o(x), \qquad \ln(1+x)x + o(x).$$

Esercizio 10.4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

- $\forall k \neq 0,\ k o((x-x_0)^\alpha) = o(k(x-x_0)^\alpha) = o((x-x_0)^\alpha)$;
- $(x-x_0)^\alpha o((x-x_0)^\beta) = o((x-x_0)^{\alpha+\beta})$;
- $o((x-x_0)^\alpha) o((x-x_0)^\beta) = o((x-x_0)^{\alpha+\beta})$;
- se $\beta > 0$ allora $(o((x-x_0)^\alpha))^\beta = o((x-x_0)^{\alpha\beta})$;
- $o((x-x_0)^\alpha) + o((x-x_0)^\beta) = o((x-x_0)^{\min(\alpha,\beta)})$.

Esercizio 10.5. Trovare $k, \alpha \in \mathbb{R}$, con $k \neq 0$, tali che

$$(x^3 + x^4 + x o(x^3))^2 = k x^\alpha + o(x^\alpha).$$

11. Undicesima settimana

Esercizio 11.1. Trovare l'intervallo più grande in cui f è analitica, nei casi

$$f \text{ polinomio}, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \ln(1+x).$$

Esercizio 11.2. Dimostrare che i polinomi di I grado sono integrabili. Calcolarne l'integrale da a a b.
(*suggerimento:* calcolare le somme inferiore e superiore relative alla suddivisione in n intervalli di uguale lunghezza e far tendere n ad infinito.)

Esercizio 11.3. Dimostrare che $f(x) = x^2$ è integrabile in $(0,1)$.

Esercizio 11.4. Dimostrare che

$$\inf_A (f+g) \geq \inf_A f + \inf_A g, \qquad \sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g.$$