

# PROGRAMMA DI FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA I

INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO A. A. 2011/2012  
LUCA ROSSI

La maggior parte degli argomenti trattati si possono trovare sul testo *Analisi matematica*, M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli. McGraw-Hill. Accanto a ciascun argomento è indicato tra parentesi il relativo capitolo del libro.

## 1. INSIEMI, APPLICAZIONI, INSIEMI NUMERICI (1)

**Cenni di teoria degli insiemi.** Operazioni tra insiemi. Leggi di De Morgan.

**Applicazioni tra insiemi.** Iniettività, suriettività. Composizione. Esistenza e unicità dell'inversa. Cardinalità (proprietà, insiemi finiti e non, caratterizzazione degli insiemi infiniti).

**Insiemi numerici.**  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ . Numerabilità. Operazioni su  $\mathbb{Q}$ . Proprietà di Archimede.  $\mathbb{Q} = \{\text{allineamenti decimali periodici con periodo } \neq 9\}$ . Irrazionalità di  $\sqrt{2}$ . Definizione di  $\mathbb{R}$  tramite allineamenti decimali.  $\mathbb{R}$  non è numerabile. Densità di  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ . Rappresentazione di  $\mathbb{R}$  come retta. Intervalli. Disuguaglianza triangolare. Limitatezza ed estremi di insiemi numerici. Caratterizzazione degli estremi, esistenza (*s.d.*). Esistenza della radice  $n$ -ma (*d.f.*). Definizione dell'esponenziale reale. Esistenza del logaritmo (*d.f.*). Principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli.

## 2. FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$ (2, 3, 4)

**Definizioni.** Dominio, codominio, immagine, grafico. Rappresentazione. Limitatezza, estremi assoluti. Iniettività, suriettività, composizione, inversa e monotonia. Simmetrie e periodicità. Deformazioni (traslazioni, dilatazioni, riflessioni). Funzioni trigonometriche.

**Definizione di limite.** Intorni. Estremi relativi. Punti di accumulazione. Definizione generale e casi particolari. Limiti destro e sinistro.

**Teoremi sui limiti.** Unicità (tramite lemma di separabilità). Permanenza del segno (con conseguente proprietà di limitatezza). Algebra dei limiti (finiti e non). Teorema del confronto e dei 2 carabinieri. Esistenza del limite per funzioni monotone, conseguenze. Limite di funzioni composte (cambio di variabile).

**Forme indeterminate.** Differenza di radici. Polinomi fratti. Confronto tra esponenziali, polinomi e logaritmi. Limiti notevoli  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $\frac{1-\cos x}{x^2}$ .

## 3. SUCCESSIONI E SERIE (5, 6)

**Successioni.** Successioni convergenti, divergenti, monotone. Proprietà dedotte da quelle delle funzioni (successioni definitivamente monotone,...). Non esistenza di limiti tramite il teorema sul limite di funzioni composte.

**Limiti notevoli di successioni.** Radice  $n$ -ma di polinomi. Confronto tra fattoriale ed esponenziale. Il numero  $e$ .

**Criterio di Cauchy.** Condizione necessaria e sufficiente (*s.d.*) per la convergenza.

**Serie.** Condizione necessaria per la convergenza della serie. Serie geometrica ed armonica generalizzata. Serie positive: teoremi del confronto e del confronto asintotico, criteri del rapporto e della radice. Serie a segno alterno: convergenza assoluta, criterio di Leibnitz.

4. CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ (7, 8)

**Funzioni continue.** Continuità delle funzioni elementari. Teorema ponte. Punti di discontinuità. Teorema di esistenza degli zeri e dei valori intermedi. Iniettività e monotonia. Continuità dell'inversa (*s.d.*). Teorema di Weierstrass.

**Funzioni derivabili.** Interpretazione fisica e grafica. Retta tangente. Rapporto tra continuità e derivabilità. Regole di derivazione, derivata delle funzioni elementari. Teoremi di Lagrange e di Cauchy. Derivata prima, monotonia ed estremi relativi. Teorema di de l'Hopital.

**Studio di funzioni.** Asintoti. Convessità (definizione, caratterizzazione con combinazioni convesse e con monotonia della derivata prima (*d.f.*), flessi).

**Sviluppi di Taylor.** Polinomio con resto in forma di Peano, resto in forma di Lagrange (*s.d.*). Caratterizzazione di massimi, minimi, flessi tramite il segno delle derivate successive.

5. INTEGRALI (9)

**Integrale di Riemann.** Calcolo di aree. Funzioni integrabili e non. Integrabilità delle funzioni continue. Teorema fondamentale del calcolo, regola di Barrow-Torricelli. Teorema della media del calcolo integrale.

**Integrali indefiniti.** Primitive. Metodo di sostituzione, integrazione per parti. Integrazione di funzioni razionali.

**Integrali impropri.** Criteri di convergenza. Convergenza assoluta. Relazione con le serie numeriche. Studio della serie armonica generalizzata.

(*d.f.*): dimostrazione facoltativa

(*s.d.*): senza dimostrazione