Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Ripasso sulla Programmazione Lineare e il metodo del Simplesso (parte I)

Luigi De Giovanni   Giacomo Zambelli

1 Problemi di programmazione lineare

Un problema di ottimizzazione vincolata è definito dalla massimizzazione di una funzione obiettivo sotto un certo numero di vincoli: si vuole trovare la soluzione che massimizza o minimizza la funzione obiettivo f tra tutte le soluzioni x che soddisfano un dato insieme di vincoli definiti come funzioni g_i. In termini matematici possiamo scrivere:

$$\begin{array}{rc} \min(\max) & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leq, \geq \text{ oppure } = b_i \quad \forall i = 1..m \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

dove
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un vettore di n variabili reali (ciascun vettore rappresenta una potenziale soluzione del problema);
- f e g_i sono funzioni $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- $b_i \in \mathbb{R}$

Un **problema di Programmazione Lineare (PL)** è un problema di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo f e tutti i vincoli g_i sono funzioni lineari delle variabili x:

$$\begin{array}{llll} \min(\max) & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = b_i & (i = 1 \ldots k) \\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & \leq b_i & (i = k+1 \ldots k') \\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & \geq b_i & (i = k'+1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R} & & (i = 1 \ldots n) \end{array}$$

Una *soluzione ammissibile* di un problema di PL è un vettore che soddisfa tutti i vincoli.

L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili si dice *regione ammissibile*.

Una *soluzione ottima* è una soluzione ammissibile che ottimizza (miminizza o massimizza) il valore della funzione obiettivo tra tutte le soluzioni ammissibili.

Non sempre un problema di PL ammette una soluzione ottima. Infatti, ogni problema di PL soddisfa sempre e solo uno dei 3 casi seguenti:

1. il problema è *inammissibile*: l'insieme delle soluzioni ammissibili è vuoto;

2. il problema è *illimitato*: è possibile trovare delle soluzioni ammissibili che fanno diminuire (o aumentare per problemi di massimo) il valore della funzione obiettivo a piacere.

3. il problema *ammette soluzione ottima*: esiste almeno una soluzione ammissibile che ottimizza la funzione obiettivo (e il valore ottimo della funzione obiettivo è limitato).

Risolvere un problema di PL significa riconoscere uno dei tre casi citati e dare, nel caso 3, una soluzione ottima e il corrispondete valore della funzione obiettivo.

Da un punto di vista geometrico, una soluzione è un punto nello spazio n-dimensionale e la regione ammissibile è un poliedro convesso nello stesso spazio. Ad esempio:

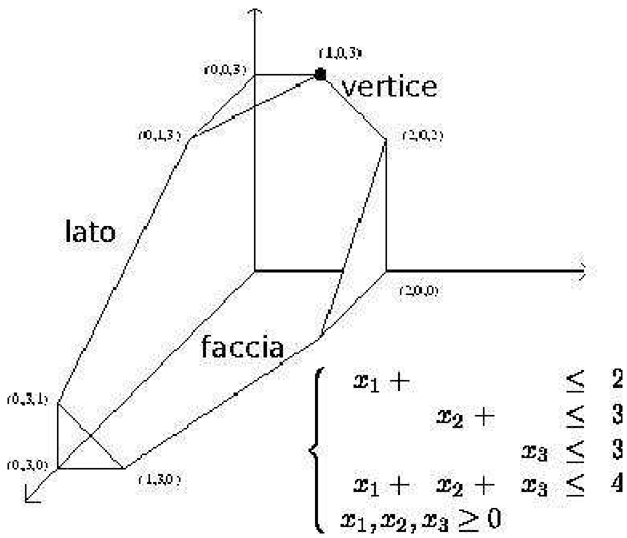

Figure 1: Un poliedro in $\mathbb{R}^3$

Si ha il seguente importante risultato:

Proprietà 1 *Dato un problema di PL, se il poliedro P delle soluzioni ammissibili è non vuoto e limitato, allora esiste almeno una soluzione ottima corrispondente con un vertice di P (**vertice di P ottimo**).*

2 Soluzione di un problema di PL

Per poter manipolare algebricamente un problema di programmazione lineare, è conveniente vedere la regione ammissibile come l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni e disequazioni lineari.

Delle semplici trasformazioni permettono di scrivere un qualsiasi problema di PL nella seguente *forma standard*:

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \;\; = b_i & (i = 1 \ldots m) \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

dove

- la funzione obiettivo è di minimo (si moltiplicano per -1 le funzioni di massimizzazione);
- tutte le variabili sono positive o nulle (si effettuano sostituzioni di variabili per le variabili libere o negative);
- tutti i vincoli sono delle equazioni (si aggiunge una variabile positiva di slack per i vincoli di $\leq$ e si sottrae una variabile positiva di surplus per i vincoli di $\geq$);
- i termini noti b_i sono tutti positivi o nulli (si moltiplicano per -1 i vincoli con termine noto negativo).

Ciò permette, senza perdere in generalità, di risolvere un qualsiasi problema di PL tramite sistemi di equazioni lineari. Richiamiamo pertanto alcune notazioni e proprietà dell'algebra lineare.

2.1 Richiami di algebra lineare

2.1.1 Notazione

- Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è una n-upla di numeri reali $(v_1, v_2 \ldots v_n)$.
- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è una tabella $m \times n$ di numeri reali ordinati secondo righe e colonne: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere visto come una matrice particolare con una sola colonna o riga:
  - vettore colonna $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$
  - vettore riga $v^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: $v^T = [v_1, v_2, ..., v_n]$
- Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, il prodotto scalare $v \cdot w$ può essere scritto come caso particolare del prodotto tra matrici righe $\times$ colonne:
  $v \cdot w = v^T w = v w^T = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ può essere scritta come giustapposizione delle sue righe o colonne: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \hline a_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_m^T \end{bmatrix} = \left[\ A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_n\ \right]$

- Il *Rango di una matrice* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è indicato con $\rho(A)$ ed è il massimo numero di righe linearmente indipendenti (coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti).

- *Matrici quadrate* $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$:

  - *matrice inversa*: $B^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m} : B^{-1}B = BB^{-1} = I$ (matrice identità $m \times m$);
  - B è *invertibile* $\iff det(B) \neq 0$ (matrice non singolare);
  - $det(B) \neq 0 \iff \rho(B) = m$.

2.1.2 Sistemi di equazioni lineari

- *Sistemi di equazioni in forma matriciale*: un sistema di m equazioni in n incognite può essere messo in forma matriciale:
  $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

- *Teorema di Rouché-Capelli*:
  $Ax = b$ ammette soluzioni $\iff \rho(A) = \rho(A|b) = r$ (∞^{n-r} soluzioni).

- *Operazioni elementari su matrici*:

  - scambiare la riga i con la riga j;
  - moltiplicare la riga i per uno scalare non nullo;
  - sostituire alla riga i, la riga i più α volte la riga j ($\alpha \in \mathbb{R}$).

  Le operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ non alterano l'insieme delle soluzioni ammissibili del sistema $Ax = b$.

- *Metodo di Gauss-Jordan* per la soluzione di sistemi $Ax = b$: eseguire delle operazioni elementari sulla matrice aumentata in modo da ottenere in A una sottomatrice identità di dimensioni pari a $\rho(A) = \rho(A|b)$.

2.2 Soluzioni di base

Un metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari si ottiene ricorrendo al concetto di *base di una matrice*. Sia data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ di rango massimo. Una base di A è una sottomatrice quadrata di A di rango massimo o, in altri termimi, una matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ottenuta scegliendo m colonne linearmente indipendenti della matrice A.

Dato un sistema $Ax = b$ si scelga una base B della matrice A. Le colonne della matrice A e le variabili del vettore x possono essere riordinati opportunamente in modo da poter scrivere:

$A = [B|F] \quad B \in \mathbb{R}^{m\times m}, det(B) \neq 0 \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix}, x_B \in \mathbb{R}^m, x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$

dove B è l'insieme delle colonne di A che formano la base, F l'insieme delle restanti colonne, x_B il vettore delle variabili corrispondenti alle colonne in base (variabili di base), x_F il vettore delle variabili corrispondenti alle colonne fuori base (variabili non di base). Di conseguenza, il sistema $Ax = b$ si può scrivere in forma a blocchi:

$Ax = b \Longrightarrow [B|F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = Bx_B + Fx_F = b$

Osservando che la matrice di base B è invertibile (ha rango massimo), una soluzione al sistema $Ax = b$ si può ottenere ponendo a 0 tutte le variabili fuori base ($x_F = 0$) e scrivendo

$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

Scegliendo una matrice di base B' diversa da B, cioé scegliendo un diverso insieme di m colonne di A linearmente indipendenti, si ottiene una nuova soluzione del sistema

$x = \begin{bmatrix} x_{B'} \\ x_{F'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}.$

Dato un sistema di equazioni $Ax = b$, le soluzioni ottenute scegliendo una base B della matrice si dicono *soluzioni di base.* Caratteristica delle soluzioni di base è di avere (al più) m variabili diverse da 0 (le variabili di base) e (almeno) $m - n$ variabili pari a 0 (variabili non di base).

Si ha la seguente importante proprietà, nota come *caratterizzazione algebrica dei vertici di un politopo*:

Proprietà 2 (Corrispondenza tra vertici e soluzioni di base). *Dato un sistema di equazioni* $Ax = b$ *e il corrispondente poliedro della regione ammissibile* $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, x *è soluzione di base del sistema* $Ax = b \Longleftrightarrow x$ *è vertice di* P.

2.3 Il metodo del simplesso

Un problema di programmazione lineare in forma standard può essere scritto in forma matriciale come segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Per la Proprietà 1, se il problema ammette soluzione ottima, allora esiste un vertice ottimo. Per la Proprietà 2, tale vertice ottimo corrisponde a una soluzione di base.

Pertanto la soluzione ottima, se esiste, può essere ricercata tra tutte le soluzioni di base del sistema di equazioni $Ax = b$. In particolare, siamo interessati alle *soluzioni* ***ammissibili*** *di base*, cioè le soluzioni di base in cui le variabili di base assumano valori positivi o nulli: $B^{-1}b \geq 0$. Infatti, vale il seguente risultato:

Proprietà 3 (Teorema fondamentale della programmazione lineare). *Dato un problema di programmazione lineare, se esiste una soluzione ottima, allora esiste una soluzione ammissibile di base ottima.*

Mentre il numero di soluzioni ammissibili è, almeno per i casi di interesse, illimitato ($\infty^{(n-r)}$ secondo il teorema di Rouché-Capelli), il numero di soluzioni ammissibili di base è limitato superiormente dal numero delle possibili combinazioni di m colonne scelte tra le n colonne di A e pertanto, si potrebbe derivare un algoritmo che ricerca esaustivamente tutte le possibili basi di A. Ovviamente, anche se non tutte le combinazioni di m colonne tra le n della matrice A corrispondono a soluzioni di base (le colonne potrebbero non essere linearmente indipendenti o la corrispondente soluzione di base potrebbe non essere ammissibile), il numero di soluzioni ammissibili di base è comunque molto elevato e la ricerca esaustiva non è un metodo efficiente.

Il **metodo del simplesso** è un metodo iterativo che permette di esplorare in modo efficiente l'insieme delle soluzioni ammissibili di base, a partire da una soluzione ammissibile di base data. L'efficienza consiste nel garantire di generare, ad ogni iterazione:

- soluzioni ammissibili
- soluzioni che migliorino (o comunque non peggiorino) la soluzione all'iterazione precedente, in termini di valore della funzione obiettivo.

L'algoritmo del simplesso è inoltre in grado di riconoscere il caso di problema di PL illimitato e, risolvendo un problema di PL artificiale (metodo delle due fasi) il caso di problema di PL non ammissibile.