Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Metodi Risolutivi per la Programmazione Lineare Intera

L. De Giovanni G. Zambelli

Un *problema di programmazione lineare intera* é una problema della forma

$$\begin{aligned} z_I = \max c^T x & \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \\ x_i \in \mathbb{Z}, & \qquad i \in I. \end{aligned} \tag{1}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ é l'insieme degli indici delle *variabili intere*. Le variabili x_i, $i \notin I$ sono invece dette *variabili continue*. Se il problema ha sia variabili intere che variabili continue, allora é detto un *problema di programmazione lineare intera mista*, mentre se tutte le variabili sono intere, il problema é detto di *programmazione lineare intera pura*.

L'insieme

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \, x \geq 0, \, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$$

é la *regione ammissibile* del problema.

$$\begin{aligned} z_L = \max c^T x & \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \end{aligned} \tag{2}$$

é detto il *rilassamento lineare* di (1).

Si noti il seguente facile fatto:

$$z_I \leq z_L. \tag{3}$$

Infatti, se x^I é la soluzione ottima di (1) e x^L é la soluzione ottima di (4), allora x^I soddisfa i vincoli di (4), e dunque $z_I = c^T x^I \leq c^T x^L = z_L$.

1 Branch and Bound

Il metodo piú comune per risolvere problemi di programmazione lineare é il metodo cosiddetto di *Branch and Bound*. Il metodo si basa sulla seguente semplice osservazione:

Data una partizione della regione ammissibile X in insiemi $X_1, \ldots, X_n$, sia $z_I^{(k)} = \max\{c^T x \mid x \in X_k\}$. Allora

$$z_I = \max_{k=1,\ldots,n} z_I^{(k)}.$$

Dunque il metodo di Branch and Bound procede partizionando X in sottoinsiemi piú piccoli, e risolvendo il problema $\max c^T x$ su ogni sotto-insieme. Questo viene fatto ricorsivamente, dividendo a loro volta le regioni ammissibili dei sotto-problemi in sottoinsiemi. Se tale ricorsione venisse svolta completamente, alla fine enumereremmo tutte le possibili soluzioni intere del problema. Questo ovviamente presenta due problemi: prima di tutto, se il problema ha infinite soluzioni l'enumerazione completa non é possibile, e anche se la regione ammissibile contenesse un numero finito di punti, tale numero potrebbe essere esponenzialmente grande, e quindi enumerare richiederebbe un tempo eccessivo.

L'algoritmo di Branch and Bound cerca di esplorare solo aree promettenti della regione ammissibile, mantenendo upper e lower bounds al valore ottimo della soluzione in una certa area, e cercando di utilizzare tali bounds per escludere a priori certi sotto-problemi.

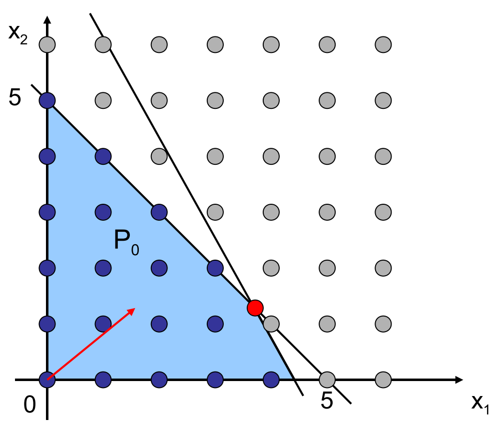
Esponiamo il metodo con un esempio.

Esempio.

Si consideri il problema (P_0):

$$\begin{array}{rrcl} z_I^0 = \max & 5x_1 + \frac{17}{4}x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ & 10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \qquad (P_0) \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

La regione ammissibile di (P_0) e del suo rilassamento lineare é rappresentato nella figura successiva.

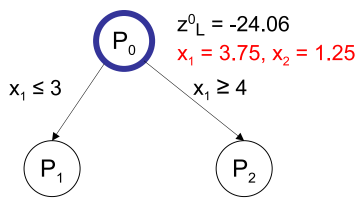


Risolvendo il rilassamento lineare di (P_0), otteniamo la soluzione ottima $x_1 = 3.75$, $x_2 = 1.75$, con valore $z_L^0 = 24.06$.

Dunque abbiamo ottenuto un upper bound per il valore ottimo z_I^0 di (P_0), ovvero $z_I^0 \leq 24. - 6$. Ora, poiché in una soluzione ottima di (P_0) x_1 avrá valore intero, allora la soluzione ottima soddisferá $x_1 \leq 3$ oppure $x_1 \geq 4$. Dunque la soluzione ottima di (P_0) sará la soluzione migliore tra le due soluzioni dei problemi (P_1) e (P_2) cosí definiti:

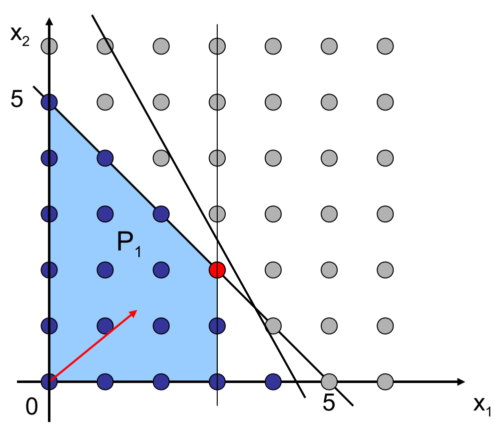
$$
\begin{array}{rrcl}
z_I^1 = \max & 5x_1 + \frac{17}{4}x_2 & & \\
& x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \\
& x_1, & \leq & 3 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array} \quad (P_1) \quad , \quad
\begin{array}{rrcl}
z_I^2 = \max & 5x_1 + \frac{17}{4}x_2 & & \\
& x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \\
& x_1, & \geq & 4 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array} \quad (P_2)
$$

Diremo che abbiamo fatto *branching sulla variabile* x_1. Si noti che in questo modo la soluzione $(3.75, 1.25)$ non appartiene al rilassamento lineare di (P_1) o (P_2). Possiamo rappresentare graficamente i sotto-problemi e i rispettivi bounds mediante un albero, detto albero di Branch-and-Bound.



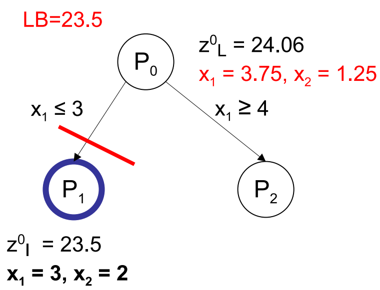
I *problemi attivi* sono le foglie dell'albero, nella fattispecie (P_1) e (P_2).

Consideriamo il problema (P_1), rappresentato in figura.

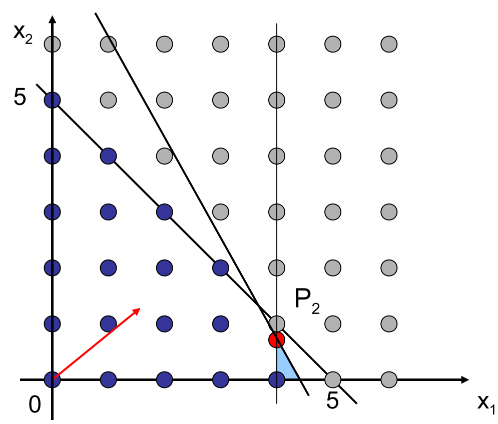


La soluzione ottima del rilassamento lineare di (P_1) é $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, con valore $z_L^1 = 23.5$. Si noti che tale soluzione é intera, e dunque, poiché $z_I^1 \leq z_L^1$, in tal caso $(3, 2)$ é anche la soluzione ottima intera. Dunque non occorre fare ulteriore branching per il nodo (P_1), che puó dunque essere potato. Diciamo che (P_1) é *potato per ottimalitá*. Si noti inoltre che la soluzione ottima di (P_0) avrá valore $z_I^0 \geq z_I^1 = 23.5$. Dunque $LB = 23.5$ é un lower-bound al valore ottimo, e $(3, 2)$ é la *soluzione intera corrente*, ovvero la miglior soluzione intera trovata fino a questo punto.

L'albero di Branch-and-Bound é ora il seguente. L'unica foglia non potata é $(P2)$ che



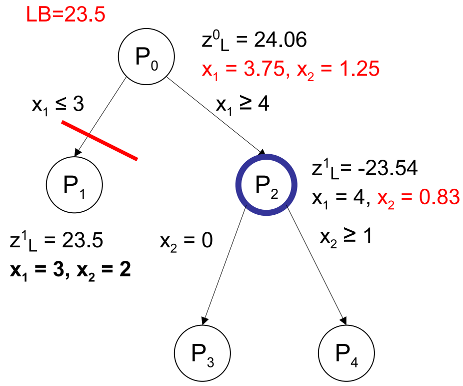
é l'unico problema attivo, ed é rappresentato nella figura successiva.



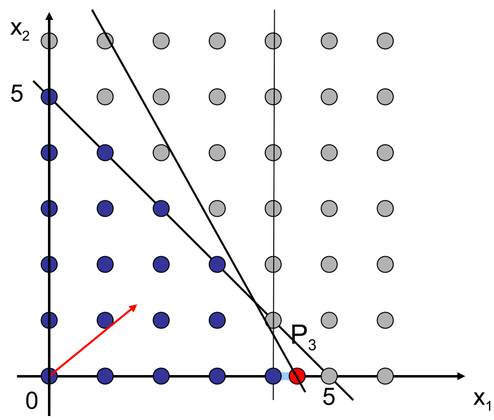
La soluzione ottima del rilassamento lineare di (P_2) é $x_1 = 4$, $x_2 = 0.83$, con valore $z_L^2 = 23.54$. Dunque $z_I^2 \leq 23.54$, e dunque 23.54 é un upper-bound al valore ottimo di (P_2). Si noti che $LB = 23.5 < 23.54$, dunque (P_1) potrebbe avere soluzione migliore della soluzione intera corrente. Poiché la componente x_2 della soluzione ottima di (P_2) ha valore 0.83, facciamo branching su x_2, ottenendo i seguenti due sotto-problemi (P_3) e (P_4) di (P_2).

$$
z_I^2 = \max \quad 5x_1 + \tfrac{17}{4}x_2 \qquad\qquad z_I^2 = \max \quad 5x_1 + \tfrac{17}{4}x_2
$$

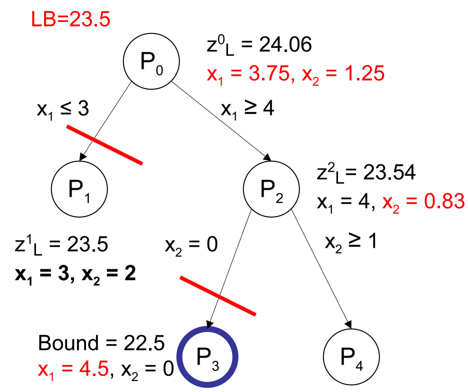
$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \\
x_1, & \geq & 4 \\
x_2, & \leq & 0 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
\quad (P_3) \quad , \quad
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
10x_1 + 6x_2 & \leq & 45 \\
x_1, & \geq & 4 \\
x_2, & \geq & 1 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
\quad (P_4)
$$



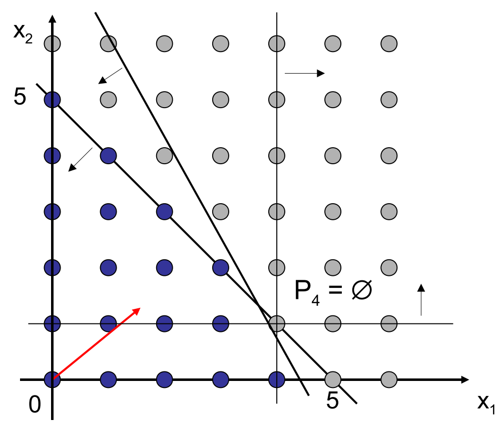
L'albero di Branch-and-Bound é ora il seguente.
I nodi attivi sono $(P3)$ e (P_4). Risolviamo il rilassamento lineare di (P_3) (rappresentato in figura),



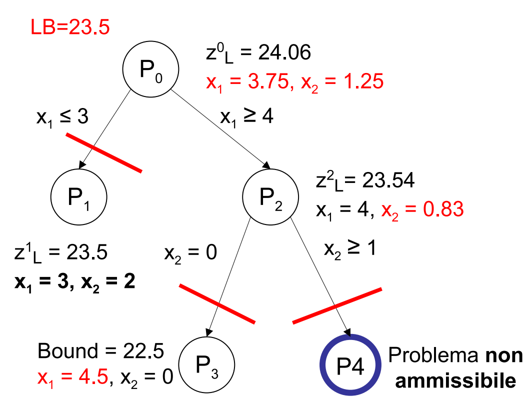
ottenendo soluzione ottima é $x_1 = 4.5$, $x_2 = 0$, con valore $z_L^3 = 22.5$. Dunque la soluzione ottima intera di (P_3) avrá valore $z_I^3 \leq 22.5$, ma poiché abbiamo giá determinato una soluzione ottima intera con valore 23.5, é inutile esplorare ulteriormente la regione ammissibile di (P_3) poiché sappiamo che non vi sará nessuna soluzione intera di valore maggiore di $22.5 < 23.5$. Possiamo dunque *potare il nodo* (P_3) *per bound*. L'albero di Branch-and-Bound corrente, rappresentato nella figura successiva, contiene un unico problema attivo, ovvero (P_4).



Risolvendo il rilassamento lineare di (P_4), si determina che tale rilassamento non ha alcuna soluzione ammissibile, e dunque (P_4) non ha neppure soluzioni intere.



Possiamo dunque *potare il nodo* (P_4) *per inammissibilitá*. L'albero di Branch-and-Bound corrente, rappresentato nella figura successiva, non ha alcun problema attivo, e dunque la soluzione intera corrente é la migliore possibile. Dunque $(3, 2)$ é la soluzione ottima di (P_0)



In quanto segue, esponiamo il metodo di Branch-and-Bound in maniera formale. Vogliamo risolvere il problema (P_0)

$$\begin{aligned} z_I = \max c^T x & \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \\ x_i \in \mathbb{Z}, & \qquad i \in I. \end{aligned}$$

ove I come al solito é l'insieme di indici delle variabili intere.

L'algoritmo manterrá un lower-bound LB sul valore ottimo z_I e manterrá la miglior soluzione ammissibile x^* per (P_0) trovata fino a questo punto (e dunque $x^*_i \in \mathbb{Z}$ per ogni $i \in I$, e $c^T x^* = LB$). Il metodo manterrá un albero di Branch-and-Bound $\mathcal{T}$ in cui le foglie non potate sono i *nodi attivi*. Denoteremo con ℓ l'indice massimo di un nodo (P_i) nell'albero di Branch-and-Bound.

Metodo di Branch-and-Bound

Inizializzazione: $\mathcal{T} := \{(P_0)\}$, $\ell := 0$, $LB := -\infty$, x^* non definita;

1. Se esiste un nodo attivo in $\mathcal{T}$, <u>scegli</u> un nodo attivo (P_k), altrimenti ritorna la soluzione ottima x^*, STOP;
2. Risolvi il rilassamento lineare di (P_k), determinando o una soluzione ottima $x^{(k)}$, di valore $z_L^{(k)}$, oppure che il rilassamento lineare di (P_k) é inammissibile.
   (a) Se il rilassamento lineare di (P_k) é inammissibile: pota (P_k) da $\mathcal{T}$ (*potatura per inammissibilitá*);
   (b) Se $z_L^{(k)} \leq LB$, allora (P_k) non puó avere soluzioni migliori di quella corrente x^*: pota (P_k) da $\mathcal{T}$ (*potatura per bound*);
   (c) Se $x_i^{(k)} \in \mathbb{Z}$ per ogni $i \in I$, allora $x^{(k)}$ é una soluzione ottima per (P_k) (ed ammissibile per (P_0)), dunque
      - Se $c^T x^{(k)} > LB$, poni $x^* := x^{(k)}$ e $LB := c^T x^{(k)}$;
      - Pota (P_k) da $\mathcal{T}$ (*potatura per ottimialitá*);
3. Se nessuno dei casi (a), (b), (c) si verifica, allora <u>scegli</u> un indice $h \in I$ tale che $x_h^{(k)} \notin \mathbb{Z}$, fai branching sulla variabile x_h, ponendo come figli di (P_k) in $\mathcal{T}$ i problemi

$$(P_{\ell+1}) := (P_\ell) \cap \{x_h \leq \lfloor x_h^{(k)} \rfloor\} \quad , \quad (P_{\ell+2}) := (P_\ell) \cap \{x_h \geq \lceil x_h^{(k)} \rceil\}$$

   Poni $\ell := \ell + 2$, torna ad 1.

Vi sono una miriade di dettagli fondamentali per rendere efficiente un metodo di Branch-and-Bound. Ci soffermiamo su due aspetti.

Scelta del nodo attivo Ci sono svariati obiettivi contrastanti che concorrono alla scelta del nodo attivo:

(i) Chiaramente, é fondamentale essere in grado di potare il maggior numero possibile di nodi, in modo da dover risolvere pochi sotto-problemi. A questo fine, é importante giungere il prima possibile ad una qualche soluzione intera, in modo da avere un lower bound. Questo suggerisce l'utilizzo di una strategia di *Depth-First Search*.

(ii) Per evitare di visitare nodi dove non vi siano buone soluzioni intere, una strategia é invece quella di scegliere un nodo attivo (P_k) con upper-bound z_L^k piú grande possibile, ovvero $z_L^k = \max_t z_L^t$ ove il massimo é preso tra gli indici dei nodi attivi. In tal modo, siamo sicuri di non dividere un nodo il cui upper bound z_L^k é minore dell'ottimo valore z_I di (P_0). Questa é una strategia di *Best-Node*.

Scelta della variabile di branching Anche in questo caso, vi sono svariate strategie applicabili. Una strategia comune é quella di scegliere come variabile di branching quella *piú frazionaria*. Ovvero, posto[1] $f_i = x_i^{(k)} - \lfloor x_i^{(k)} \rfloor$, scegliamo $h \in I$ tale che

$$h = \arg\min_{i \in I}\{\min\{f_i, 1 - f_i\}\}.$$

2 Buone formulazioni

Si noti che il rilassamento lineare non é unico. Infatti, data una matrice $A' \in \mathbb{R}^{m' \times n}$ e un vettore $b' \in \mathbb{R}^{m'}$, diciamo che

$$\begin{aligned} A'x &\le b' \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

é una *formulazione* per X se vale

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \le b',\, x \ge 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}.$$

In tal caso, il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} z'_L &= \max c^T x \\ A'x &\le b' \\ x &\ge 0 \end{aligned} \tag{4}$$

é anch'esso un rilassamento lineare di (1). Chiaramente, X puó avere infinite possibili formulazioni, e dunque vi sono infiniti possibili rilassamenti per (4).

[1] Dato un numero a denotiamo con $\lfloor a \rfloor$ l'arrotondamento per difetto di a, ovvero $\lfloor a \rfloor$ é l'intero minore o uguale ad a piú vicino ad a stesso.

Date due formulazioni per X,

$$Ax \leq b,\ x \geq 0$$

e

$$A'x \leq b,\ x \geq 0,$$

diciamo che la prima formulazione é migliore della seconda se

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b',\ x \geq 0\}.$$

La precedente nozione é giustificata dal fatto che, se $Ax \leq b$, $x \geq 0$ é una formulazione migliore di $A'x \leq b'$, $x \geq 0$, allora

$$z_I \leq z_L \leq z'_L,$$

e dunque il rilassamento lineare dato da $Ax \leq b$, $x \geq 0$ dá un bound piú stretto sul valore ottimo del problema intero rispetto al rilassamento lineare determinato da $A'x \leq b'$, $x \geq 0$.

Si noti che ottenere buoni bounds é fondamentale al fine di visitare pochi nodi nell'albero di Branch-and-Bound.

Esempio: Facility location.

Sono dati n possibili siti ove aprire delle *facilities* (ovvero centri che erogano un servizio/prodotto), e m clienti. Aprire la facility i, $i = 1, \ldots, n$, incorre un costo fisso f_i. Il costo di far servire il cliente j dalla facility i é c_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Ogni cliente deve essere servito da esattamente una facility. Il problema é quello di decidere quale facilities aprire e assegnare ogni cliente ad una facility che lo serva, minimizzando il costo totale.

Abbiamo le seguenti variabili decisionali:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se facility } i \text{ apre,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se facility } i \text{ serve cliente } j, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Il costo totale sará dunque dato

$$\sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

che é quindi la funzione obiettivo che dobbiamo minimizzare.

Il fatto che ogni cliente deve essere servito da esattamente una facility puó essere espresso con i vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Infine il cliente j puó essere servito dalla facility i solo se i viene aperta, e dunque dobbiamo avere vincoli che esprimono il seguente fatto:

$$y_i = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Questo fatto puó essere espresso attraverso vincoli lineari in due modi:

Modo 1:

$$x_{ij} \leq y_i, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Dunque, se $y_i = 0$, allora $x_{ij} = 0$ per ogni j, mentre se $y_i = 1$, tali vincoli non pongono alcuna restrizione su x_{ij}.

Modo 2:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Si noti che, se $y_i = 0$, allora $x_{ij} = 0$ per ogni j, mentre se $y_i = 1$ allora il vincolo diventa $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m$, che non pone alcuna restrizione sugli x_{ij} poiché le m é il numero totale dei clienti, e dunque alla facility i possono venire assegnati al piú m clienti.

I vincoli ottenuti con il Modo 1 sono detti *vincoli non aggregati*, quelli ottenuti con il Modo 2 *vincoli aggregati*. Abbiamo dunque due possibili formulazioni per il problema di facility location.

Con i vincoli ottenuti nel primo modo otteniamo:

$$\begin{array}{ll}
\min \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, m; \\
x_{ij} \leq y_i, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\
0 \leq x_{ij} \leq 1, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\
0 \leq y_i \leq 1, & i = 1, \ldots, n; \\
x_{ij} \in \mathbb{Z},\ y_i \in \mathbb{Z} & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.
\end{array} \tag{5}$$

Con i vincoli ottenuti nel secondo modo otteniamo:

$$\begin{array}{ll}
\min \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, m; \\
\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m y_i, & i = 1, \ldots, n; \\
0 \leq x_{ij} \leq 1, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\
0 \leq y_i \leq 1, & i = 1, \ldots, n; \\
x_{ij} \in \mathbb{Z},\ y_i \in \mathbb{Z} & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.
\end{array} \tag{6}$$

Si noti che la prima formulazione ha piú vincoli della seconda (infatti i vincoli non aggregati sono mn, mentre i vincoli aggregati sono solo n). Tuttavia la prima formulazione é meglio della seconda. Infatti, siano

$$P_1 = \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, m; \\ x_{ij} \leq y_i, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\ 0 \leq y_i \leq 1, & i = 1, \ldots, n; \end{array} \right\}$$

$$P_2 = \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, m; \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq m y_i, & i = 1, \ldots, n; \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\ 0 \leq y_i \leq 1, & i = 1, \ldots, n; \end{array} \right\}$$

Dimostreremo che $P_1 \subsetneq P_2$.

Prima di tutto dimostriamo che $P_1 \subseteq P_2$. A tal fine, dimostriamo che, dato $(x,y) \in P_1$, allora $(x,y) \in P_2$. Se $(x,y) \in P_1$, allora $x_{ij} \leq y_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Dunque, dato $i \in \{1, \ldots, n\}$, sommando le precedenti m disuguaglianze $x_{ij} \leq y_i$, $j = 1, \ldots, m$, otteniamo $\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq m y_i$, e dunque $(x,y) \in P_2$.

Infine, per far vedere che $P_1 \neq P_2$, esibiamo un punto in $P_2 \setminus P_1$. Sia $n = 2$, $m = 4$, e consideriamo il punto dato da

$$x_{11} = 1,\ x_{12} = 1,\ x_{13} = 0,\ x_{14} = 0;$$

$$x_{21} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 1,\ x_{24} = 1;$$

$$y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2}.$$

Si noti che tale punto soddisfa i vincoli aggregati ma non quelli non aggregati, poiché $1 = x_{11} \not\leq y_1 = \frac{1}{2}$. ■

3 Formulazioni ideali

Ha quindi senso considerare la *formulazione ideale per X*, ovvero la formulazione lineare per X il cui rilassamento lineare abbia la regione ammissibile minimale (rispetto all'inclusione). In quanto segue cerchiamo di rendere formale questo concetto.

Ricordiamo che un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é *convesso* se, per ogni coppia di punti $x, y \in C$, il segmento di retta che unisce x e y é tutto contenuto in C. E' facile vedere che, dato un sistema $Ax \leq b$, $x \geq 0$, l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ é un insieme convesso.

Dato un qualunque insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (nella fattispecie X é l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di programmazione a numeri interi) denotiamo con $\text{conv}(X)$

l'*inviluppo convesso* di X, ovvero l'insieme convesso minimale che contenente X. In altri termini, $\text{conv}(X)$ é l'unico insieme convesso di $\mathbb{R}^n$ tale che $X \subseteq \text{conv}(X)$ e $\text{conv}(X) \subseteq C$ per ogni insieme convesso C che contenga X.

Dunque, data una formulazione $Ax \leq b$, $x \geq 0$ per X, allora, poiché $X \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}$ é convesso, avremo che $\text{conv}(X) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}$. Dunque $\text{conv}(X)$ deve essere contenuto nella regione ammissibile del rilassamento lineare di qualunque formulazione per X.

Il seguente é un teorema fondamentale in programmazione a numeri interi, e mostra che esiste una formulazione lineare per X il cui rilassamento lineare ha come regione ammissibile esattamente $\text{conv}(X)$.

Teorema 1 *Sia*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \textit{ per ogni } i \in I\}$$

ove $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{Q}^m$. Allora esistono una matrice $\tilde{A} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m} \times n}$ e un vettore $\tilde{b} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m}}$ tale che

$$\text{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \leq \tilde{b},\, x \geq 0\}.$$

Dati $\tilde{A} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m} \times n}$ e $\tilde{b} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m}}$ tali che $\text{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \leq \tilde{b},\, x \geq 0\}$, diremo dunque che $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$ é la *formulazione ideale* per X. Il teorema precedente dimostra che tale formulazione ideale esiste.

Torniamo al problema a numeri interi:

$$\begin{aligned} z_I = \max c^T x \\ x \in X \end{aligned} \tag{7}$$

ove $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$, per una certa matrice $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e vettore $b \in \mathbb{Q}^m$ dati.

Sia $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ la formulazione ideale per X, e consideriamo il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \tilde{z} = \max c^T x \\ \tilde{A}x \leq \tilde{b} \\ x \geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Aggiungendo variabili di scarto, otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{z} = \max c^T x \\ \tilde{A}x + Is = \tilde{b} \\ x \geq 0,\, s \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Sappiamo, dalla teoria della programmazione lineare, che esiste una soluzione ottima (x^*, s^*) per (9) che sia di base per $\tilde{A}x + Is = \tilde{b}$, $x, s \geq 0$. Si noti che, per costruzione

$s^* = \tilde{b} - \tilde{A}x^*$. Se $(x^*, s^* = \tilde{b} - \tilde{A}x^*)$ é una soluzione di base di $\tilde{A}x + Is = \tilde{b}$, $x, s \geq 0$, allora diremo che x^* é *una soluzione di base* per $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$. Dunque esiste una soluzione ottima di (8) che sia di base per $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$.

Teorema 2 *Se $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$ é la formulazione ideale per $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z}$ per ogni $i \in I\}$, allora, per ogni soluzione di base x^* per $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$, si ha $x^* \in X$.*

Dunque, il teorema precedente implica che risolvere il problema (8) é equivalente a risolvere (7). Infatti, data una soluzione ottima di base x^* per (8) (e dunque abbiamo $\tilde{z} = c^T x^*$), allora per il teorema precedente $x^* \in X$, e dunque x^* é una soluzione ammissibile per il problema di programmazione a numeri interi (7), pertanto $\tilde{z} = c^T x^* \leq z_I$, ma poiché (8) é un rilassamento lineare di (7), vale anche $z_I \leq \tilde{z}$, e dunque $\tilde{z} = z_I$, pertanto x^* é ottima anche per (7).

Dunque, in linea di principio, risolvere un problema di programmazione lineare intera é equivalente a risolvere un problema di programmazione lineare in cui il sistema dei vincoli dia la formulazione ideale. Ci sono peró due problemi, che rendono la programmazione lineare intera piú difficile della programmazione lineare:

- La formulazione ideale non é nota a priori, e puó essere assai difficile da determinare,
- Anche qualora fosse nota, la formulazione ideale potrebbe avere un numero assai elevato di vincoli, e dunque il problema (8) non puó essere risolto direttamente con i normali algoritmi per la programmazione lineare (come ad esempio l'algoritmo del simplesso).

Esempio: Matching di peso massimo.

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Un *matching* di G é un insieme di spigoli $M \subseteq E$ tale che gli elementi di M sono a due a due non-adiacenti. In altre parole, $M \subseteq E$ é un matching se ogni nodo di G é estremo di al piú uno spigolo di G.

Il problema del matching di peso massimo é il seguente: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, e pesi sugli spigoli $w_e, e \in E$, determinare un matching M di G di peso totale $\sum_{e \in M} w_e$ massimo possibile.

Possiamo scrivere il problema del matching di peso massimo come un problema di programmazione lineare intera come segue. Avremo una variabile decisionale binaria x_e per ogni $e \in E$, ove

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{se } e \text{ é nel matching,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad e \in E.$$

Sia $M = \{e \in \,|\, x_e = 1\}$. Il peso di M sará dunque dato da

$$\sum_{e \in E} w_e x_e.$$

Affinché M sia un matching, dobbiamo garantire che M non contenga due spigoli adiacenti, ovvero che, per ogni nodo $v \in V$, vi sia al piú uno spigolo $e \in E$ avente v come estremo tale che $x_e = 1$. Questo puó essere espresso mediante il vincolo lineare

$$\sum_{u \in V \ t.c. \ \{u,v\} \in E} x_{\{u,v\}} \leq 1, \quad v \in V.$$

Dunque il problema del matching di peso massimo puó essere espresso mediante il problema

$$\begin{array}{lr} \sum_{e \in E} w_e x_e & \\ \sum_{u \in V \ t.c. \ \{u,v\} \in E} x_{\{u,v\}} \leq 1, & v \in V \\ 0 \leq x_e \leq 1, & e \in E \\ x_e \in \mathbb{Z}, & e \in E. \end{array} \qquad (10)$$

Si noti che tale formulazione non é ideale. Ad esempio, si consideri il caso in cui G sia un "triangolo", ovvero $V = \{a, b, c\}$ e $E = \{\{ab\}, \{ac\}, \{bc\}\}$. Siano $w_{\{ab\}} = w_{\{ac\}} = w_{\{bc\}} = 1$. Non é difficile vedere che $x^*_{\{ab\}} = x^*_{\{ac\}} = x^*_{\{bc\}} = \frac{1}{2}$ é la soluzione ottima del rilassamento lineare di (10) in questo caso, e dunque il valore di tale soluzione é $\frac{3}{2}$, mentre ovviamente un matching di G in questo caso puó contenere al piú uno spigolo, e dunque il matching di peso massimo ha peso 1.

Possiamo tuttavia ottenere una formulazione migliore della precedente aggiungendo delle disuguaglianze che possiamo "ad-hoc" che possiamo ottenere guardando piú attentamente alla struttura del problema.

Si consideri un insieme di nodi $U \subseteq V$ contenente un numero dispari di elementi (ovvero $|U|$ dispari). Dato un qualunque matching M di G, ogni nodo in U é estremo di al piú un elemento di M, e ogni elemento di M ha al piú due estremi in U. Dunque, il numero di spigoli in M con entrambi gli estremi in U é al piú $|U|/2$. Poiché $|U|$ é dispari, e il numero di spigoli in M con entrambi gli estremi in U é un intero, allora M puó contenere al piú $\lfloor |U|/2 \rfloor = (|U| - 1)/$ spigoli con entrambi gli estremi in U. Dunque, ogni punto intero x che soddisfa i vincoli di (10) deve anche soddisfare

$$\sum_{\{u,v\} \in E, \ t.c. \ u,v \in U} x_{\{u,v\}} \leq \frac{|U| - 1}{2}, \qquad \text{per ogni } U \subseteq V \text{ tale che } |U| \text{ sia dispari.}$$

Tali disuguaglianze sono dette *odd cut inequalities.*

Ad esempio, nell'esempio precedente del triangolo, V stesso ha cardinalitá dispari, e quindi, poiché $(|V| - 1)/2 = 1$, vale la disuguaglianza

$$x_{\{ab\}} + x_{\{ac\}} + x_{\{bc\}} \leq 1.$$

Si noti che il punto x^* non soddisfa tale disuguaglianza, poiché $x^*_{\{ab\}} + x^*_{\{ac\}} + x^*_{\{bc\}} = \frac{3}{2} \not\leq 1$.

Dunque la seguente é una formulazione del problema del matching di peso massimo migliore di (10)

$$
\begin{array}{rl}
\sum_{e\in E} w_e x_e & \\
\sum_{u\in V\, t.c.\, \{u,v\}\in E} x_{\{u,v\}} \leq 1, & v \in V \\
\sum_{\{u,v\}\in E,\, t.c.\, u,v\in U} x_{\{u,v\}} \leq \frac{|U|-1}{2} & U \subseteq V\ |U| \text{ dispari}, \\
0 \leq x_e \leq 1, & e \in E \\
x_e \in \mathbb{Z}, & e \in E.
\end{array}
\tag{11}
$$

In effetti, é possibile dimostrare che (11) é la formulazione ideale per il problema del matching di peso massimo, e che dunque sarebbe sufficiente risolvere il rilassamento lineare di tale formulazione per ottenere l'ottimo del problema intero. Naturalmente, in questo caso il rilassamento lineare ha un numero esponenziale di vincoli (infatti ci sono $2^{|V|-1}$ sottoinsiemi di V di cardinalitá dispari) ed é dunque impossibile dal punto di vista pratico risolvere il problema con tutte le odd-cut inequalities (si pensi che per un grafo con soli 40 nodi vi sarebbero giá piú di 500 miliardi di odd-cut inequalities). Una strategia migliore é quella di risolvere una sequenza di rilassamenti lineari, a partire dal problema (10), aggiungendo una o piú odd-cut inequalities alla volta che taglino la soluzione ottima corrente, fino a che non si trovi una soluzione ottima intera.

4 Il metodo dei piani di taglio

L'idea del metodo dei piani di taglio é quella di risolvere una serie di rilassamenti lineari che approssimino via via sempre meglio l'inviluppo convesso della regione ammissibile intorno alla soluzione ottima.

Piú formalmente, vogliamo come al solito risolvere il problema di programmazione a numeri interi (P_I)

$$
\begin{array}{c}
\max c^T x \\
x \in X
\end{array}
\qquad (P_I)
$$

ove $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$, per una certa matrice $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ e vettore $b \in \mathbb{Q}^m$ dati.

Diremo che una disuguaglianza lineare $\alpha^T x \leq \beta$, ove $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$, é *valida* per X se, per ogni $x \in X$, $\alpha^T x \leq \beta$ é soddisfatta. Si noti dunque che, se $A'x \leq b'$, $x \geq 0$, é una qualunque formulazione per X, allora anche il sistema ottenuto aggiungendo una disuguaglianza per valida $\alpha^T x \leq \beta$ é una formulazione per X.

Dato $x^* \notin$ conv, diremo che una disuguaglianza valida per X $\alpha^T x \leq \beta$ *taglia* (o *separa*) x^* se $\alpha x^* > \beta$. Dunque, se $A'x \leq b'$, $x \geq 0$ é una qualunque formulazione per X, e x^* é un punto che soddisfa $A'x^* \leq b'$, $x^* \geq 0$, allora data una qualunque disuguaglianza $\alpha^T x \leq \beta$ valida per X che tagli x^*, anche il sistema $A'x \leq b'$, $\alpha^T x \leq \beta$, $x \geq 0$ é una formulazione per X.

Metodo dei piani di taglio

Considera come rilassamento lineare iniziale $\max\{c^T x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}$.

1. Risolvi il rilassamento lineare corrente, e sia x^* la soluzione ottima di base;
2. Se $x^* \in X$, allora x^* é una soluzione ottima di (P_I), STOP.
3. Altrimenti, determina una disuguaglianza $\alpha^T x \leq \beta$ valida per X che tagli x^*;
4. Aggiungi il vincolo $\alpha^T x \leq \beta$ al rilassamento lineare corrente e torna ad 1.

Naturalmente, il metodo dei piani di taglio descritto é un modo generale per affrontare problemi di programmazione lineare intera, ma per implementarlo é necessario fornire un modo automatico per determinare disuguaglianze che taglino la soluzione ottima corrente. Di seguito ne esponiamo uno.

4.1 Tagli di Gomory

Il metodo dei tagli di Gomory é applicabile solo a problemi di programmazione lineare intera pura. Ovvero, consideriamo il problema

$$\begin{aligned} z_I = \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{12}$$

ove $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ e vettore $b \in \mathbb{Q}^m$ dati. Sia $X = \{x \mid Ax = b,\, x \geq 0,\, x \in Z^n\}$.

Si risolva il rilassamento lineare di tale problema con il metodo del simplesso, ottenendo alla fine il problema in forma tableau rispetto alla base ottima B (ove con N denotiamo l'insieme di indici delle variabili fuori base)

$$\begin{array}{lllcll} \min & z & & & & \\ & -z & +\sum_{j\in N} \bar{c}_j x_j & = & -z_B & \\ & x_{\beta[i]} & +\sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j & = & \bar{b}_i, & i = 1,\ldots,m \\ & & x & \geq & 0. & \end{array}$$

Poiché B é una base ottima, i costi ridotti sono tutti non-negativi, ovvero $\bar{c}_j \geq 0$, $j \in N$. La soluzione ottima x^* di base rispetto alla base B é data da

$$\begin{array}{rcll} x^*_{\beta[i]} & = & \bar{b}_i, & i = 1,\ldots,m; \\ x^*_j & = & 0, & j \in N; \end{array}$$

pertanto $x^* \in \mathbb{Z}^n$ se e solo se $\bar{b}_i \in \mathbb{Z}$ per $i = 1,\ldots,m$.

Se ció non avviene, sia $h \in \{1, \dots, m\}$ un indice tale che $\bar{b}_h \notin \mathbb{Z}$.

Si noti che ogni punto x che soddisfa $Ax = b$, $x \geq 0$, soddisfa anche

$$x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j \leq \bar{b}_h$$

poiché

$$\bar{b}_h = x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j \geq x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j$$

ove la disuguaglianza vale poiché $x_j \geq 0$ e $\bar{a}_{hj} \geq \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor$ per ogni j.

Ora, poiché stiamo risolvendo un problema lineare intero puro, ogni soluzione intera ammissibile di $Ax = b$, $x \geq 0$ soddisfa

$$x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_h \rfloor \tag{13}$$

poiché $x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j$ é un numero intero.

La disuguaglianza (13) é detta *taglio di Gomory*. Dalla precedente discussione, il taglio di Gomory (13) é valido per X, e inoltre si puó vedere che taglia la soluzione ottima corrente x^*, poiché

$$x^*_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x^*_j = x^*_{\beta[h]} = \bar{b}_h > \lfloor \bar{b}_h \rfloor$$

ove il fatto che $\bar{b}_h > \lfloor \bar{b}_h \rfloor$ discende dal fatto che $\bar{b}_h$ non é intero.

Risulta conveniente scrivere il taglio di Gomory (13) in forma equivalente. Aggiungendo una variabile di scarto s, il taglio di Gomory (13) diventa

$$x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j + s = \lfloor \bar{b}_h \rfloor, \quad s \geq 0.$$

Si noti che, poiché tutti i coefficienti nell'equazione ottenuta sono interi, allora se x é un vettore con componenti intere, allora anche s deve essere intero. Possiamo dunque richiedere che s sia anch'essa una variabile intera.

Ora, sottraendo alla precedente l'equazione del tableau

$$x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j = \bar{b}_h,$$

si ottiene

$$\sum_{j \in N} (\lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor - a_{hj}) x_j + s = \lfloor \bar{b}_h \rfloor - b_h.$$

Quest'ultima disuguaglianza é detto *taglio di Gomory in forma frazionaria.*

Aggiungendo tale vincolo al tableau ottimo precedente, otteniamo

$$\begin{array}{llllll}
\min & z & & & & \\
 & -z & + \sum_{j\in N} \bar{c}_j x_j & & = & -z_B \\
 & & x_{\beta[i]} + \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j & & = & \bar{b}_i, \qquad i = 1,\dots,m \\
 & & \sum_{j\in N} (\lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor - a_{hj}) x_j & +s & = & \lfloor \bar{b}_h \rfloor - b_h \\
 & & x, & s & \geq & 0.
\end{array}$$

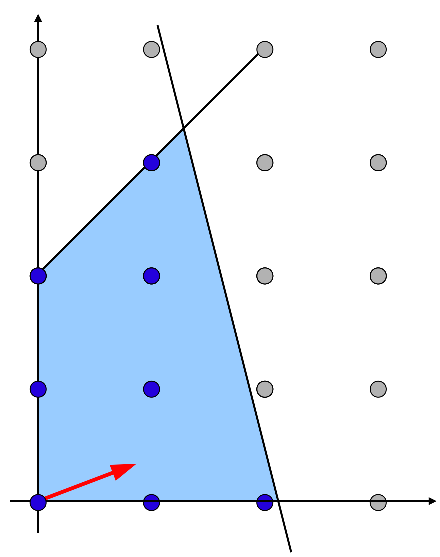
Si noti che il problema é giá in forma tableau rispetto alla base in cui le variabili in base siano $x_{\beta[1]}, \dots, x_{\beta[m]}, s$, e che tale base é ammissibile nel duale poiché i costi ridotti sono non-negativi (visto che sono i costi ridotti del tableau ottimo del problema precedente, senza il nuovo vincolo).

Si noti inoltre che $\bar{b}_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, mentre il termine noto del vincolo in cui s compare é $\lfloor \bar{b}_h \rfloor - b_h < 0$. Possiamo dunque risolvere il problema con il metodo del simplesso duale, ed alla prima iterazione dovremo far uscire la variabile s.

Esempio.

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl}
\min\ z & = & -11x_1 - 4.2x_2 \\
-x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
8x_1 + 2x_2 & \leq & 17 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \ \text{intere.}
\end{array} \tag{14}$$



Aggiungiamo variabili di scarto x_3 e x_4 per portare il problema in forma standard:

$$\begin{array}{rcl}
-z - 11x_1 - 4.2x_2 & = & 0 \\
-x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\
8x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 17 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \ \text{intere.}
\end{array}$$

Risolvendo il rilassamento lineare, otteniamo il tableau:

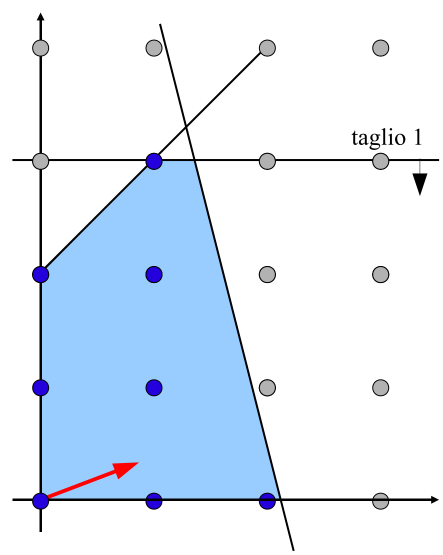
$$\begin{array}{rrrrrcl} -z & & & +1.16x_3 & +1.52x_4 & = & 28.16 \\ & & x_2 & +0.8x_3 & +0.1x_4 & = & 3.3 \\ & x_1 & & -0.2x_3 & +0.1x_4 & = & 1.3 \end{array}$$

La soluzione di base corrispondente é $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 3.3$ con valore obiettivo $z = -28.16$. Poiché i valori di x_1 e x_2 non sono interi, questa non é una soluzione ammissibile di (14). Possiamo ottenere un taglio di Gomory dall'equazione $x_2 + 0.8x_3 + 0.1x_4 = 3.3$, ottenendo

$$x_2 \leq 3$$

Aggiungendo questo taglio al rilassamento lineare originario, otteniamo una nuova formulazione.

$$\begin{array}{l} \max\ 11x_1 + 4.2x_2 \\ \quad -x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ \quad x_2 \leq 3 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$



Per risolvere questo problema, otteniamo il taglio di Gomory in forma frazionaria, con variabile di scarto x_5, ovvero

$$-0.8x_3 - 0.1x_4 + x_5 = -0.3.$$

Aggiungendolo al tableau ottimo precedente

$$\begin{array}{rrrrrrcl} -z & & & +1.16x_3 & +1.52x_4 & & = & 28.16 \\ & & x_2 & +0.8x_3 & +0.1x_4 & & = & 3.3 \\ & x_1 & & -0.2x_3 & +0.1x_4 & & = & 1.3 \\ & & & -0.8x_3 & -0.1x_4 & +x_5 & = & -0.3 \end{array}$$

Risolvendo con il simplesso duale, facciamo uscire di base x_5, mentre entra in base x_3, poiché $\min\{1.16/0.8, 1.52/0.1\} = 1.16/0.8$.

Otteniamo il tableau ottimo

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-z & & & & +1.375x_4 & +1.45x_5 & = & 27.725 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & & & +0.125x_4 & -0.25x_5 & = & 1.375 \\
 & & & x_3 & +0.125x_4 & -1.25x_5 & = & 0.375
\end{array}$$

La soluzione di base é $x_1 = 1.375$, $x_2 = 3$ $x_3 = 0.375$, con valore $z = 27.725$.

Dall'equazione $x_3+0.125x_4-1.25x_5 = 0.375$ del tableau, otteniamo il taglio di Gomory

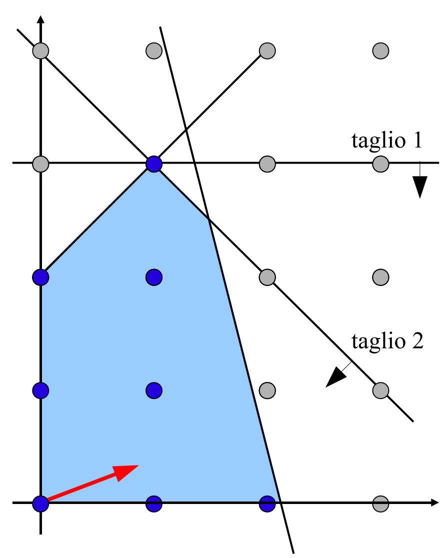
$$x_3 - 2x_5 \leq 0$$

che, poiché $x_3 = 2 + x_1 - x_2$ e $x_5 = 3 - x_2$, nello spazio (x_1, x_2) é espresso da

$$x_1 + x_2 \leq 4.$$

Aggiungendo questo vincolo al problema originale, otteniamo il nuovo rilassamento lineare

$\max\ 11x_1 + 4.2x_2$
$-x_1 + x_2 \leq 2$
$8x_1 + 2x_2 \leq 17$
$x_2 \leq 3$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0.$



Il taglio di Gomory in forma frazionaria é

$$-0.125x_4 - 0.75x_5 + x_6 = -0.375$$

Aggiungendo il taglio al tableau ottimo precedente, otteniamo

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
-z & & & +1.375x_4 & +1.45x_5 & & = & 27.725 \\
& x_2 & & & +x_5 & & = & 3 \\
x_1 & & & +0.125x_4 & -0.25x_5 & & = & 1.375 \\
& & x_3 & +0.125x_4 & -1.25x_5 & & = & 0.375 \\
& & & -0.125x_4 & -0.75x_5 & +x_6 & = & -0.375
\end{array}$$

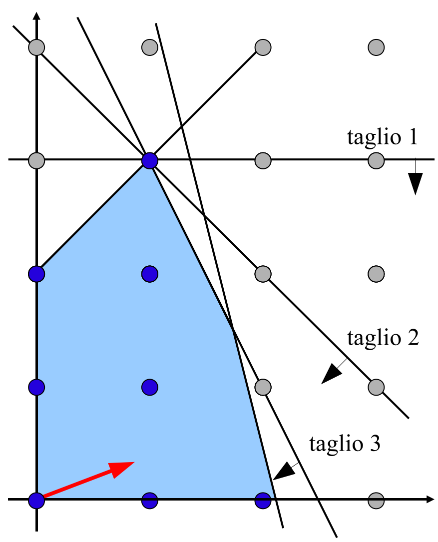
Dobbiamo far uscire di base x_6, e far entrare in base x_5, ottenendo il tableau ottimo

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
-z & & & +17/15x_4 & & +29/15x_6 & = & 27 \\
& x_2 & & -1/6x_4 & & +4/3x_6 & = & 2.5 \\
x_1 & & & +1/6x_4 & & -1/3x_6 & = & 1.5 \\
& & x_3 & & & +x_6 & = & 0 \\
& & & 1/6x_4 & +x_5 & -4/3x_6 & = & 0.5
\end{array}$$

Dunque la soluzione ottima é $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$ con valore $z = 27$.

Dall'equazione $1/6x_4 + x_5 - 4/3x_6 = 0.5$ del tableau, otteniamo il taglio di Gomory $x_5 - 2x_6 \leq 0$ che, poiché $x_5 = 3 - x_2$ e $x_6 = 4 - x_1 - x_2$, nello spazio (x_1, x_2) é espresso da $2x_1 + x_2 \leq 5$. Il nuovo rilassamento lineare é

max $11x_1 + 4.2x_2$
$-x_1 + x_2 \leq 2$
$8x_1 + 2x_2 \leq 17$
$x_2 \leq 3$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$2x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0.$



Il taglio di Gomory in forma frazionaria é

$$-1/6x_4 - 2/3x_6 + x_7 = -0.5$$

Per risolvere il nuovo rilassamento, aggiungiamo il taglio al tableau ottimo precedente, ottenendo

$$
\begin{array}{rrrrrrrrcl}
-z & & & +17/15x_4 & & +29/15x_6 & & = & 27 \\
& x_2 & & -1/6x_4 & & +4/3x_6 & & = & 2.5 \\
x_1 & & & +1/6x_4 & & -1/3x_6 & & = & 1.5 \\
& & x_3 & & & +x_6 & & = & 0 \\
& & & 1/6x_4 & +x_5 & -4/3x_6 & & = & 0.5 \\
& & & -1/6x_4 & & -2/3x_6 & +x_7 & = & -0.5
\end{array}
$$

Dobbiamo fare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per arrivare all'ottimo: nella prima esce di base x_7 ed entra x_6, nella seconda esce x_3 ed entra x_4, ottenendo cosí il tableau ottimo:

$$
\begin{array}{rrrrrrrcl}
-z & & +13/15x_3 & & & & +76/15x_7 & = & 23,6 \\
& x_2 & +2/3x_3 & & & & +1/3x_7 & = & 3 \\
x_1 & & -1/3x_3 & & & & +1/3x_7 & = & 1 \\
& & 4/3x_3 & +x_4 & & & -10/3x_7 & = & 3 \\
& & -2/3x_3 & & +x_5 & & -1/3x_7 & = & 0 \\
& & -1/3x_4 & & & x_6 & -2/3x_7 & = & 0
\end{array}
$$

Dunque la soluzione ottima é $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ con valore $z = 23.6$. Questa é dunque la soluzione ottima intera del problema.