Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Problema dell'assegnamento e matrici totalmente unimodulari

L. De Giovanni G. Zambelli

1 Problema dell'assegnamento

Sia dato un grafo non orientato bipartito $G = (V, E)$, ove V denota l'insieme dei nodi di G e E l'insieme degli spigoli.

Ricordiamo che G bipartito significa che V puó essere partizionato in due sottoinsiemi disgiunti V_1, V_2 tali che, per ogni spigolo $\{u, v\} \in V$, esattamente uno tra u e v é in V_1.

Nel problema dell'assegnamento abbiamo $|V_1| = |V_2|$ e costi c_e su ogni spigolo $e \in E$, e vogliamo assegnare ad ogni nodo u in V_1 esattamente un nodo adiacente v in V_2, in modo che ogni nodo in V_2 si assegnato ad un nodo in V_1 e che la somma dei costi sugli spigoli selezionati sia minima possibile.

Dunque, avremo una variabile binaria x_{uv} per ogni $u \in V_1$, $v \in V_2$ tali che $\{u, v\} \in E$, ove

$$x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ é assegnato a } v, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il costo totale di un assegnamento determinato da x é dunque

$$\sum_{\{uv\} \in E} x_{uv}.$$

Il fatto che ad ogni nodo u in V_1 sia assegnato un nodo adiacente $v \in V_2$ é espresso dai vincoli

$$\sum_{\{u,v\} \in E} x_{uv} = 1, \quad u \in V_1,$$

mentre il fatto che ogni nodo $v \in V_2$ sia assegnato ad un nodo adiacente $u \in V_1$ é espresso dai vincoli

$$\sum_{\{u,v\} \in E} x_{uv} = 1, \quad v \in V_2.$$

Il problema dell'assegnamento puó dunque essere scritto come il problema di programmazione lineare intera

$$
\begin{array}{rcll}
\min \sum_{\{uv\}\in E} x_{uv} & & & \\
\sum_{v:\{u,v\}\in E} x_{uv} & = & 1, & u \in V_1, \\
\sum_{u:\{u,v\}\in E} x_{uv} & = & 1, & v \in V_2, \\
x_{uv} & \geq & 0, & \{u,v\} \in E \\
x_{uv} & \in & Z, & \{u,v\} \in E
\end{array}
\tag{1}
$$

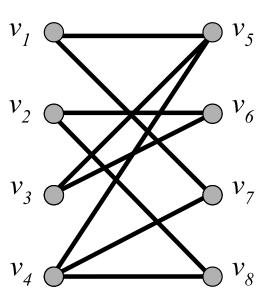
Si noti che non é necessario includere i vincoli $x_{uv} \leq 1$ per ogni $\{u,v\} \in E$, in quanto sono implicati dai vincoli del sistema.

Vogliamo esprimere il problema precedente in termini di matrici.

Definizione 1 *Dato un grafo non orientato $G = (V,E)$ (non necessariamente bipartito), la* matrice di incidenza *di G é la matrice $0,1$ $A(G)$ con $|V|$ righe e $|E|$ colonne, ove l'elemento $a_{v,e}$ nella riga di $A(G)$ corrispondente al nodo v e nella colonna di $A(G)$ corrispondente allo spigolo e vale*

$$
a_{v,e} = \begin{cases} 1 & \textit{se } v \in e, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}
$$

Si noti che ogni colonna di $A(G)$ ha esattamente 2 entrate di valore 1, e tutte le altre 0. Inoltre, se G é bipartito, allora ogni colonna di $A(G)$ ha esattamente una entrata di valore 1 nelle righe di $A(G)$ corrispondenti ai nodi in V_1, e una entrata di valore 1 nelle righe di $A(G)$ corrispondenti ai nodi in V_2. La figura seguente mostra l'esempio di un grafo bipartito e della sua matrice di incidenza.



	v_1v_5	v_1v_7	v_2v_6	v_2v_8	v_3v_5	v_3v_6	v_4v_5	v_4v_7	v_4v_8
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
v_5	1	0	0	0	1	0	1	0	0
v_6	0	0	1	0	0	1	0	0	0
v_7	0	1	0	0	0	0	0	1	0
v_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1

Dunque, il problema dell'assegnamento puó essere scritto nella forma

$$
\begin{array}{c}
\max c^T x \\
A(G)\, x = \mathbf{1} \\
x \geq 0 \\
x \in \mathbb{Z}^{|E|},
\end{array}
$$

ove con **1** denotiamo il vettore con tutte le componenti uguali ad 1.

In quanto segue, osserveremo che nel precedente problema i vincoli di interezza possono essere rimossi, in quanto la formulazione data é ideale. In altri termini, dimostreremo che tutte le soluzioni di base del sistema $A(G)\ x = \mathbf{1}$, $x \geq 0$, sono tutte intere. Questo seguirá da una proprietá fondamentale della matrici di incidenza dei grafi bipartiti: la totale unimodularitá.

2 Matrici Totalmente Unimodulari

Dato un vettore o una matrice, diremo che tale vettore o matrice é *intero* se tutte le sue componenti sono intere.

Definizione 2 *Una matrice A si dice* totalmente unimodulare *se, per ogni sottomatrice quadrata B di A,* $\det(B) \in \{0, +1, -1\}$.

Si noti che, poiché ogni componente di A é una matrice quadrata 1×1, allora ogni matrice totalmente unimodulare ha componenti con valore 0, $+1$ o -1.

Ricordiamo il seguente fatto di algebra lineare. Data una matrice quadrata $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e dati indici $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, denotiamo con B^{ij} la matrice ottenuta da B rimuovendo la riga j-esima e la colonna i-esima. Se B é non-singolare, allora l'entrata (i, j) della matrice inversa di B é

$$(B^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{\det(B^{ij})}{\det(B)}.$$

In particolare, ció implica che, se B é intera, allora tutte le entrate di B^{-1} sono numeri interi divisi per il determinante di B. Dunque, se B é intera e $\det(B) = \pm 1$, allora B^{-1} é una matrice intera. In particolar modo, se A é una matrice totalmente unimodulare, allora, per ogni sottomatrice quadrata non-singolare B di A, B^{-1} é intera.

Teorema 1 *Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice totalmente unimodulare, e $b \in \mathbb{R}^m$ un vettore intero. Allora tutte le soluzioni di base del sistema*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

sono intere.

Dimostrazione: Data una base B di A, la soluzione di base $\bar{x}$ di $Ax = b$, $x \geq 0$ associata a B é

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1} b, \\ \bar{x}_F &= 0. \end{aligned}$$

Poiché A é totalmente unimodulare, dalla precedente discussione B^{-1} é una matrice intera. Siccome stiamo assumendo che b sia un vettore intero, allora $B^{-1}b$ é un vettore intero, e dunque $\bar{x}$ é un vettore intero. □

Teorema 2 *La matrice di incidenza di un grafo bipartito é totalmente unimodulare.*

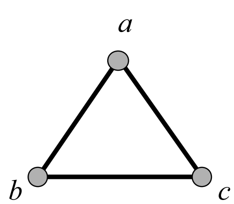
Dimostrazione: Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito e V_1, V_2 sia la bipartizione dei nodi di G tale che ogni spigolo ha un estremo in V_1 e l'altro in V_2. Sia B una sottomatrice quadrata di $A(G)$. Vogliamo dimostrare che B ha determinante $0, \pm 1$. Supponiamo di no, e tra tutte le sottomatrici di $A(G)$ con determinante diverso da $0, \pm 1$, supponiamo che B sia quella con meno righe e colonne. Poiché B é una sottomatrice di $A(G)$, ogni colonna di B ha al piú una componente di valore 1 nelle righe che corrispondono a nodi in V_1, e al piú una componente di valore 1 nelle righe che corrispondono a nodi in V_2.

Se ogni colonna di B ha esattamente due componenti di valore 1, allora la somma di tutte le righe di B corrispondenti a nodi in V_1 meno la somma di tutte le righe di B corrispondenti a nodi in V_2 dá il vettore nullo, pertanto in tal caso le righe di B sono linearmente dipendenti, e dunque $\det(B) = 0$.

Possiamo dunque assumere che ci sia una colonna di B, diciamo la j-esima, con un unica componente di valore 1, diciamo la componente i-esima, e tutte le altre di valore 0. Per la nota regola di Laplace per calcolare i determinanti, se B' é la sotto-matrice di B ottenuta rimuovendo la riga i-esima e la colonna j-esima, abbiamo $\det(B) = (-1)^{i+j} \det(B')$. Dunque, poiché avevamo scelto B la matrice piú piccola possibile con determinante diverso da $0, \pm 1$, allora $\det(B') = 0, \pm 1$, e dunque $\det(B) = (-1)^{i+j} \det(B') = 0, \pm 1$, una contraddizione. $\square$

Dunque, i Teoremi 1 e 2 implicano che tutte le soluzioni di base di (2) sono intere.

Si noti che l'ipotesi nel Teorema 2 che il grafo sia bipartito é fondamentale. Ad esempio, si consideri il grafo



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{ccc} ab & ac & bc \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{1} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \multicolumn{1}{|c}{1} & 0 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$$

Si noti che la matrice precedente ha determinante -2, e dunque non é totalmente unimodulare.

Ci sono varie operazioni che mantengono la totale unimodularitá. Ad esempio, se A é una matrice totalmente unimodulare $m \times n$, allora

1. Ogni matrice ottenuta da A permutando righe e colonne é totalmente unimodulare,

2. Ogni matrice ottenuta da A moltiplicando righe e colonne per -1 é totalmente unimodulare,

3. A^T é totalmente unimodulare,

4. La matrice (A, I) é totalmente unimodulare (ove I sia la matrice identitá $m \times m$),

5. La matrice $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ é totalmente unimodulare (ove I sia la matrice identitá $n \times n$).

I fatti 1,2 sono immediati, poiché se B é una matrice quadrata e B' é ottenuta da B permutando righe e colonne o moltiplicandole per -1, allora $\det(B') = \pm\det(B)$. Il punto 3 discende dal fatto che $\det(B) = \det(B^T)$. Il punto 5 discende da 3 e 4. Per dimostrare il punto 4, si consideri una sottomatrice quadrata B di (A, I). A meno di permutare le righe di B, possiamo assumere

$$\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline D & I \end{array}\right)$$

ove $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ é una sotto-matrice di A. Dunque, per note regole del calcolo dei determinanti $\det(B) = \det(C) = 0, \pm 1$ poiché C é una sotto-matrice di A che é totalmente unimodulare.

Dunque, i fatti precedenti insieme al Teorema 1 implicano il seguente.

Teorema 3 *Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matrice totalmente unimodulare, e $b \in \mathbb{R}^m$ un vettore intero. Allora tutte le soluzioni di base del sistema*

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

sono intere.

Dimostrazione: Un punto $\bar{x}$ é di base per il sistema nell'enunciato se il punto $(\bar{x}, \bar{s})$, ove $\bar{s} = b - A\bar{x}$, é di base per il sistema in forma standard

$$\begin{aligned} Ax + Is &= b \\ x \ge 0,\ s &\ge 0. \end{aligned}$$

Poiché, per il punto 4., la matrice dei vincoli di uguaglianza é totalmente unimodulare, allora $(\bar{x}, \bar{s})$ é intera, e dunque $\bar{x}$ é un vettore intero. $\square$

Problema dei trasporti Sia dato un grafo non orientato bipartito $G = (V, E)$, e sia V_1, V_2 una partizione di V tale che ogni spigolo di G abbia un estremo in V_1 e l'altro in V_2.

Per ogni nodo $u \in V_1$, sia $d_u \in \mathbb{Z}$ la quantitá che puó essere inviata da u ai nodi in V_2, e per ogni nodo $v \in V_2$ sia $r_v \in \mathbb{Z}$ la quantitá richiesta al nodo v. Per ogni $e = \{u, v\} \in E$, $u \in V_1$, sia c_e il costo unitario di trasporto da u a v. Vogliamo spedire dai nodi di V_1 ai nodi di V_2 lungo gli spigoli di G a costo minimo, in modo da soddisfare le domande dei nodi in V_2, e in modo che la quantitá totale spedita da ogni nodo $u \in V_2$ non ecceda d_u. Questo é il *problema dei trasporti*, che puó essere formulato come

$$\begin{array}{rcll} \min \sum_{\{uv\} \in E} c_{uv} x_{uv} & & & \\ \sum_{v:\{u,v\} \in E} x_{uv} & \leq & d_u, & u \in V_1, \\ \sum_{u:\{u,v\} \in E} x_{uv} & \geq & r_v, & v \in V_2, \\ x_{uv} & \geq & 0, & \{u,v\} \in E \\ x_{uv} & \in & Z, & \{u,v\} \in E \end{array} \tag{2}$$

ove x_{uv} rappresenta il numero di unitá spedite da $u \in V_1$ a $v \in V_2$.

Per i Teoremi 2 e 3, tutte le soluzioni di base del sistema precedente sono intere, e dunque il rilassamento lineare del problema ha una soluzione ottima intera.

Matrici di incidenza di grafi orientati Dato un grafo orientato $D = (V, A)$, la *matrice di incidenza di* D é la matrice $0, \pm 1$ $A(G)$ con $|V|$ righe e $|A|$ colonne, ove, per ogni arco $e = (v, w)$ l'elemento $a_{u,e}$ nella riga di $A(D)$ corrispondente al nodo u e nella colonna di $A(D)$ corrispondente all'arco e vale

$$a_{u,e} = \begin{cases} -1 & \text{se } u = v, \\ 1 & \text{se } u = w, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Teorema 4 *La matrice di incidenza di un grafo orientato é totalmente unimodulare.*

La dimostrazione del Teorema 4 é praticamente identica a quella del Teorema 2: l'unica differenza é che, se B é una sottomatrice quadrata di $A(D)$ in cui ogni colonna di B ha esattamente due componenti non-nulle, allora la somma di tutte le righe di B dá il vettore nullo, pertanto in tal caso le righe di B sono linearmente dipendenti, e dunque $\det(B) = 0$.