Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Cover ineuqualities: promemoria

L. De Giovanni G. Zambelli

Sia dato un problema di programmazione lineare contenente (tra gli altri) un vincolo di zaino (knapsack constraint)

$$\sum_{j \in J} w_j x_j \leq W$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

dove J è un insieme di oggetti (item), w_j è il peso dell'oggetto $j \in J$, W è la capienza complessiva dello zaino e x_j è una variabile binaria associata alla selezione dell'oggetto j.

La formulazione può essere rinforzata (sthrengthened) aggiungendo una o più *cover inequality* del tipo:

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

dove

$$C \subset J : \sum_{j \in C} w_j > W$$

Tali disuguaglianze, valide se si considerano le variabili x_j intere, potrebbero essere violate da una soluzione frazionaria del rilassamento continuo del problema in esame.

Data una soluzione frazionaria $\bar{X}$, si può risolvere un *problema di separazione* per riconoscere una delle disuguaglianze valide violate. Tale disuguaglianza può essere aggiunta alla formulazione di partenza, in modo da escludere la soluzione frazionaria corrente senza perdere nessuna soluzione intera, e migliorare il valore della funzione obiettivo del rilassamento continuo (inteso come bound per la soluzione intera). Si tratta di individuare, tra tutte le cover $C \subset J$, una tale che

$$\sum_{j \in C} \bar{X}_j > |C| - 1$$

o, in altri termini,

$$\sum_{j \in C}(1 - \bar{X}_j) < 1$$

Avendo un termine noto costante, il problema di separazione di una cover inequality si può risolvere attraverso un problema di ottimizzazione che utilizza come variabili decisionali delle y_j che valgono 1 se l'oggetto j è nella cover, 0 altrimenti:

$$\min \sum_{j \in J}(1 - \bar{X}_j)y_j$$

$$s.t. \sum_{j \in J} w_j y_j \geq W + \epsilon$$

$$y_j \in \{0, 1\}$$

Se, all'ottimo, la funzione obiettivo è strettamente minore di 1, la corrispondente soluzione y indica quali oggetti si trovano in una cover violata e il corrispondente vincolo può essere convenientemente aggiunto alla formulazine del problema di partenza. Altrimenti, la soluzione $\bar{X}$ non viola nessuna cover inequality e la formulazione non può essere ulteriormente rinforzata (per questa via).