Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Metodo del Simplesso Duale

L. De Giovanni G. Zambelli

Il metodo del simplesso duale mantiene ad ogni iterazione una base ammissibile nel duale (ovvero una base per la quale i costi ridotti siano non-positivi) e termina quando determina una base che sia ammissibile anche nel primale. Tale metodo puó essere interpretato come il metodo del simplesso eseguito sul problema duale invece che sul primale.

Si consideri come al solito il problema (P)

$$\begin{aligned} \min c^T x & \\ Ax = & \ b \\ x \geq & \ 0 \end{aligned}$$

e il suo duale (D)

$$\begin{aligned} \max u^T b & \\ u^T A \leq & \ c^T, \end{aligned}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, e x é un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Sia B una base ammissibile nel duale. Il problema in forma tableau rispetto a B sia

$$\begin{array}{lllll} \min & z & & & \\ & -z & & +\bar{c}_F x_F & = & z_B \\ & & x_B & +\bar{F} x_F & = & \bar{b}, \\ & & & x & \geq & 0. \end{array} \tag{1}$$

ove

- $\bar{c}^T = c - c_B^T B^{-1} A$,
- $\bar{F} = B^{-1} F$,
- $\bar{b} = B^{-1} b$,
- $z_B = c_B^T B^{-1} b$

Poiché B é ammissibile nel duale, la soluzione duale associata a B

$$\bar{u}^T = c_B^T B^{-1}$$

é ammissibile per (D), dunque $\bar{u}^T A \leq c^T$, e dunque $\bar{c} \geq 0$, pertanto i costi ridotti relativi a B sono non-negativi.

La soluzione di base $\bar{x}$ relativa a B é definita da

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ove $x_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_{\beta[1]} \\ \vdots \\ \bar{x}_{\beta[m]} \end{pmatrix}$ se $\beta[i]$ denota l'indice della variabile in base alla riga i-esima.

Se $\bar{b}_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, allora $\bar{x}$ é ammissibile, e dunque B é una base ammissibile nel primale, e dunque ottima. In tal caso $\bar{x}$ é una soluzione ottima e abbiamo risolto il problema.

Supponiamo dunque che esista $h \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $\bar{b}_h < 0$.

Vogliamo far uscire di base la variabile $x_{\beta[h]}$, e dobbiamo selezionare la variabile entrante in modo da ottenere una nuova base ammissibile nel duale. Sia come al solito $\bar{a}_{ij}$ la componente nella riga i e colonna j della matrice $\bar{A} = B^{-1}A = (I|\bar{F})$.

Abbiamo due casi.

Caso 1: $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.

In tal caso, ogni soluzione ammissibile x per il primale dovrá soddisfare

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{hj} x_j = \bar{b}_h$$

Poiché $x \geq 0$ e $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, m$, avremo $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{hj} x_j \geq 0$, e dunque $0 \geq \bar{b}_h$, che é un assurdo, poiché abbiamo scelto $\bar{b}_h < 0$.

Pertanto, in tal caso, il problema primale non ammette soluzione.

Caso 2: $\bar{a}_{hj} < 0$ per qualche $j \in N$.

Vogliamo determinare un indice k tale che la base $\tilde{B}$, ottenuta da B rimuovendo la colonna relativa alla variabile x_k e aggiungendo la colonna relativa alla variabile $x_{\beta[h]}$, rimanga ammissibile nel duale. Questo avviene quando il vettore $\tilde{c}$ dei costi ridotti rispetto a $\tilde{B}$ é non-negativo. Sia $\tilde{N} = \{1, \ldots, n\} \setminus \tilde{B}$. Come si puó verificare facendo un pivot sull'entrata (h, k) del tableau relativo alla base B, il vettore $\tilde{c}_{\tilde{N}}$ é dato da

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{a}_{hj}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dunque, poiché $\bar{c}_{\beta[h]} = 0$ e $\bar{a}_{h\beta[h]} = 1$,

$$\tilde{c}_{\beta[h]} = -\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}},$$

e poiché $\bar{c}_k \geq 0$, $\tilde{c}_{\beta[h]} \geq 0$ se e solo se $\bar{a}_{hk} < 0$. Dunque dobbiamo scegliere un'indice k tale che $\bar{a}_{hk} < 0$. Inoltre, affinché $\tilde{B}$ sia ammissibile nel duale, deve valere $\tilde{c}_j \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, $j \neq \beta[h]$, ovvero

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{a}_{hj} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n,\ j \neq \beta[h].$$

Se $\bar{a}_{hj} \geq 0$, allora la condizione é verificata poiché in tal caso $\tilde{c}_j \geq \bar{c}_j \geq 0$, ove la disuguaglianza discende dal fatto che $\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{a}_{hj} \geq 0$ e che $\bar{c}_j \geq 0$.
Se $\bar{a}_{hj} < 0$, allora $\tilde{c}_j \geq 0$ se e solo se

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \geq \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{hj}},$$

ovvero

$$\frac{\bar{c}_k}{|\bar{a}_{hk}|} \leq \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{hj}|}.$$

Dobbiamo dunque scegliere k tale che $a_{hk} < 0$ e

$$\frac{\bar{c}_k}{|\bar{a}_{hk}|} = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{hj}|} \ : \ j = 1, \ldots, n \text{ tale che } \bar{a}_{hj} < 0 \right\};$$

Con una tale scelta di k, $\tilde{B}$ é una base ammissibile. Inoltre, si puó verificare che il valore della soluzione duale rispetto alla base $\tilde{B}$ é

$$c_{\tilde{B}}^T \tilde{B}^{-1} b = z_B + \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{b}_h \geq z_B,$$

ove la disuguaglianza vale poiché $\bar{c}_k \geq 0$, $\bar{a}_{hk} < 0$ e $\bar{b}_h < 0$.

Dunque abbiamo trovato una soluzione duale di base ammissibile di valore maggiore uguale alla soluzione precedente, e dunque una soluzione non peggiore di quella precedente (poiché il duale é un problema di massimo).

Ricapitoliamo il metodo del simplesso revisionato nella tavola seguente.

Metodo del Simplesso Duale

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, una base B (le cui colonne hanno indici $\{\beta[1], \ldots, \beta[m]\}$) ammissibile per il duale di (P);

Output: Una soluzione ottima di base $\bar{x}$ per (P), oppure il fatto che (P) é inammissibile.

1. Calcola il tableau rispetto alla base B;
2. Se $\bar{b} \geq 0$, allora B è una base ottima, STOP.
3. Altrimenti, scegli h tale che $\bar{b}_h < 0$;
4. Se $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, allora il problema è inammissibile, STOP.
5. Altrimenti scegli $k \in N$ tale che
$$\bar{a}_{hk} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\bar{c}_k}{|\bar{a}_{hk}|} = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{|\bar{a}_{hj}|} \ : \ j = 1, \ldots, n \text{ tale che } \bar{a}_{hj} < 0 \right\};$$
6. Poni $\beta[h] := k$ e torna ad 1.