Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Metodi Risolutivi per la Programmazione Lineare Intera - Parte II

L. De Giovanni G. Zambelli

1 Buone formulazioni

Si consideri un problema di programmazione a numeri interi

$$\begin{aligned} z_I = \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x_i \in \mathbb{Z}, \qquad i \in I. \end{aligned} \tag{1}$$

ove $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$ e $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ è l'insieme degli indici delle variabili intere. Sia

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$$

la regione ammissibile del problema, e sia

$$\begin{aligned} z_L = \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

il rilassamento lineare di (1).

Si noti che il rilassamento lineare non è unico. Infatti, data una matrice $A' \in \mathbb{R}^{m' \times n}$ e un vettore $b' \in \mathbb{R}^{m'}$, diciamo che

$$\begin{aligned} A'x \leq b' \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

è una *formulazione* per X se vale

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b',\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}.$$

In tal caso, il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} z'_L = \max c^T x \\ A'x \leq b' \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

è anch'esso un rilassamento lineare di (1). Chiaramente, X può avere infinite possibili formulazioni, e dunque vi sono infiniti possibili rilassamenti per (1).

Date due formulazioni per X,

$$Ax \leq b,\ x \geq 0$$

e

$$A'x \leq b,\ x \geq 0,$$

diciamo che la prima formulazione è migliore della seconda se

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b',\ x \geq 0\}.$$

La precedente nozione è giustificata dal fatto che, se $Ax \leq b$, $x \geq 0$ è una formulazione migliore di $A'x \leq b'$, $x \geq 0$, allora

$$z_I \leq z_L \leq z'_L,$$

e dunque il rilassamento lineare dato da $Ax \leq b$, $x \geq 0$ dà un bound più stretto sul valore ottimo del problema intero rispetto al rilassamento lineare determinato da $A'x \leq b'$, $x \geq 0$.

Si noti che ottenere buoni bounds è fondamentale al fine di visitare pochi nodi nell'albero di Branch-and-Bound.

Esempio: Facility location.

Sono dati n possibili siti ove aprire delle *facilities* (ovvero centri che erogano un servizio/prodotto), e m clienti. Aprire la facility i, $i = 1, \ldots, n$, incorre un costo fisso f_i. Il costo di far servire il cliente j dalla facility i è c_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Ogni cliente deve essere servito da esattamente una facility. Il problema è quello di decidere quale facilities aprire e assegnare ogni cliente ad una facility che lo serva, minimizzando il costo totale.

Abbiamo le seguenti variabili decisionali:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se facility } i \text{ apre,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se facility } i \text{ serve cliente } j, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Il costo totale sarà dunque dato

$$\sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

che è quindi la funzione obiettivo che dobbiamo minimizzare.

Il fatto che ogni cliente deve essere servito da esattamente una facility può essere espresso con i vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Infine il cliente j può essere servito dalla facility i solo se i viene aperta, e dunque dobbiamo avere vincoli che esprimono il seguente fatto:

$$y_i = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Questo fatto può essere espresso attraverso vincoli lineari in due modi:

Modo 1:

$$x_{ij} \leq y_i, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Dunque, se $y_i = 0$, allora $x_{ij} = 0$ per ogni j, mentre se $y_i = 1$, tali vincoli non pongono alcuna restrizione su x_{ij}.

Modo 2:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Si noti che, se $y_i = 0$, allora $x_{ij} = 0$ per ogni j, mentre se $y_i = 1$ allora il vincolo diventa $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m$, che non pone alcuna restrizione sugli x_{ij} poiché le m è il numero totale dei clienti, e dunque alla facility i possono venire assegnati al più m clienti.

I vincoli ottenuti con il Modo 1 sono detti *vincoli non aggregati*, quelli ottenuti con il Modo 2 *vincoli aggregati*. Abbiamo dunque due possibili formulazioni per il problema di facility location.

Con i vincoli ottenuti nel primo modo otteniamo:

$$\begin{array}{ll}
\min \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, m; \\
x_{ij} \leq y_i, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\
0 \leq x_{ij} \leq 1, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\
0 \leq y_i \leq 1, & i = 1, \ldots, n; \\
x_{ij} \in \mathbb{Z},\ y_i \in \mathbb{Z} & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.
\end{array} \tag{4}$$

Con i vincoli ottenuti nel secondo modo otteniamo:

$$\begin{array}{ll}
\min \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, m; \\
\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m y_i, & i = 1, \ldots, n; \\
0 \leq x_{ij} \leq 1, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\
0 \leq y_i \leq 1, & i = 1, \ldots, n; \\
x_{ij} \in \mathbb{Z},\ y_i \in \mathbb{Z} & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.
\end{array} \tag{5}$$

Si noti che la prima formulazione ha più vincoli della seconda (infatti i vincoli non aggregati sono mn, mentre i vincoli aggregati sono solo n). Tuttavia la prima formulazione è meglio della seconda. Infatti, siano P_1 l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano

$$\begin{array}{rl} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, m; \\ x_{ij} \leq y_i, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\ 0 \leq y_i \leq 1, & i = 1, \ldots, n; \end{array}$$

e P_2 l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano

$$\begin{array}{rl} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1, \ldots, m; \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m y_i, & i = 1, \ldots, n; \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1, & i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m; \\ 0 \leq y_i \leq 1, & i = 1, \ldots, n; \end{array}$$

Dimostreremo che $P_1 \subsetneq P_2$.

Prima di tutto dimostriamo che $P_1 \subseteq P_2$. A tal fine, dimostriamo che, dato $(x, y) \in P_1$, allora $(x, y) \in P_2$. Se $(x, y) \in P_1$, allora $x_{ij} \leq y_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Dunque, dato $i \in \{1, \ldots, n\}$, sommando le precedenti m disuguaglianze $x_{ij} \leq y_i$, $j = 1, \ldots, m$, otteniamo $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq m y_i$, e dunque $(x, y) \in P_2$.

Infine, per far vedere che $P_1 \neq P_2$, esibiamo un punto in $P_2 \setminus P_1$. Sia $n = 2$, $m = 4$, e consideriamo il punto dato da

$$x_{11} = 1,\ x_{12} = 1,\ x_{13} = 0,\ x_{14} = 0;$$

$$x_{21} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 1,\ x_{24} = 1;$$

$$y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2}.$$

Si noti che tale punto soddisfa i vincoli aggregati ma non quelli non aggregati, poiché $1 = x_{11} \not\leq y_1 = \frac{1}{2}$. ■

Esempio: Produzione multi-periodo.

Una azienda deve pianificare la propria produzione in un orizzonte temporale suddiviso in n periodi. Per ciascun periodo $t = 1, \ldots, n$, l'azienda ha una stima della domanda d_t di quel prodotto. Se l'azienda decide di produrre nel periodo t, essa incorre in un costo fisso f_t (indipendente dalla quantitá prodotta nel periodo t) e da un costo c_t per unitá prodotta. Inoltre, l'azienda puó mantenere in magazzino parte di quanto giá prodotto. Il costo di mantenere una unitá di prodotto in magazzino dal periodo t al periodo $t + 1$ è h_t, $t = 1, \ldots, n - 1$.

L'azienda vuole decidere, quanto produrre in ciascun periodo t e quanto mettere in magazzino alla fine di ogni periodo, in modo da soddisfare la domanda in ogni periodo e di minimizzare il costo totale.

Per ogni periodo $t = 1, \dots, n$, sia x_t la variabile che rappresenta il numero di unitá prodotte nel periodo t. Sia y_t una variabile binaria che assume valore 1 se nel periodo t si produce qualcosa, 0 altrimenti. Sia infine s_t il numero di unitá mantenute in magazzino dal periodo t al periodo $t + 1$. Per facilitare la notazione, poniamo $s_0 = 0$.

Il costo totale è dunque

$$\sum_{t=1}^{n} c_t x_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t + \sum_{t=1}^{n-1} h_t s_t$$

che è la funzione obiettivo da minimizzare.

In un certo periodo t, $t = 1, \dots, n$, la quantità di prodotto disponibile è $s_{t-1} + x_t$. Di questa, d_t unitá andranno a soddisfare la domanda per il periodo t, mentre il rimanente verá messo in magazzino fino al prossimo periodo. Dunque

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Naturalmente,

$$s_t \geq 0,\ t = 1, \dots, n-1; \quad x_t \geq 0,\ t = 1, \dots, n.$$

Infine, dobbiamo garantire che, se produciamo in un certo periodo t, allora y_t assuma valore 1. Questo viene garantito dai vincoli seguenti:

$$x_t \leq M y_y \quad t = 1, \dots, n,$$

ove M sia un upper bound al valore massimo di x_t. Ad esempio, $M = \sum_{t=1}^{n} d_t$. Naturalmente, dobbiamo poi imporre

$$0 \leq y_t \leq 1 \quad t = 1, \dots, n$$

$$y_t \in \mathbb{Z} \quad t = 1, \dots, n.$$

Si puó vedere che in generale la soluzione ottima del rilassamento lineare dato da tale formulazione puó avere soluzioni frazionarie. Ad esempio, supponiamo che i costi di magazzino siano molto elevati rispetto a tutti gli altri costi. Allora nella soluzione ottima avremo $s_t = 0$ per ogni $t = 1, \dots, n-1$. Pertanto, per soddisfare la domanda dovremo produrre in ogni periodo esattamente la quantitá necessaria a soddisfare la domanda in quel periodo. Pertanto $x_t = d_t$ $t = 1, \dots, n$. Si noti a questo punto che, nella soluzione ottima intera, dovremmo avere $y_t = 1$, $t = 1, \dots, n$. Tuttavia, nel rilassamento lineare possiamo porre $y_t = d_t/M < 1$.

È possibile dare una formulazione migliore, utilizzando delle variabili supplementari. Per ogni periodo i, $i = 1 \dots, n$, e per ogni periodo $j = i, \dots, n$, sia w_{ij} la quantitá prodotta nel periodo i che viene venduta nel periodo j.

Dunque, la quantitá totale prodotta per essere venduta nel periodo t sará $\sum_{i=1}^{t} w_{it}$, pertanto dobbiamo avere

$$\sum_{i=1}^{t} w_{it} \geq d_t \quad t = 1, \ldots, n.$$

Chiaramente

$$x_t = \sum_{j=t}^{n} w_{tj} \quad t = 1, \ldots, n.$$

e

$$s_t = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=t+1}^{n} w_{ij} \quad t = 1, \ldots, n-1.$$

Infine, dobbiamo avere

$$w_{ij} \leq d_j y_i, \quad i = 1, \ldots, n, j = i, \ldots, n.$$

Naturalmente, abbiamo sempre $y_t \in \{0, 1\}$, $t = 1, \ldots, n$. Tali vincoli forzano la variabile y_t ad 1 ogniqualvolta $x_t > 0$.

siano P_1 l'insieme dei punti (x, y, s) che soddisfano

$$\begin{array}{cl} s_{t-1} + x_t = d_t + s_t & t = 1, \ldots, n; \\ x_t \leq M y_y & t = 1, \ldots, n; \\ x_t \geq 0 & t = 1, \ldots, n; \\ s_t \geq 0 & t = 1, \ldots, n-1; \\ 0 \leq y_t \leq 1 & t = 1, \ldots, n \end{array}$$

e P_2 l'insieme dei punti (x, y, s) che soddisfano per cui esiste un w tale che (x, y, s, w) soddisfi

$$\begin{array}{cl} \sum_{i=1}^{t} w_{it} \geq d_t & t = 1, \ldots, n; \\ x_t = \sum_{j=t}^{n} w_{tj} & t = 1, \ldots, n; \\ s_t = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=t+1}^{n} w_{ij} & t = 1, \ldots, n-1; \\ w_{ij} \leq d_j y_i, & i = 1, \ldots, n, j = i, \ldots, n; \\ w_{ij} \geq 0 & i = 1, \ldots, n, j = i, \ldots, n; \\ 0 \leq y_t \leq 1 & t = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Non è difficile verificare che ogni punto di P_2 soddisfa i vincoli di P_1 e dunque $P_2 \subseteq P_1$. D'altra parte, il punto $s_t = 0$ $(t = 1, \ldots, n-1)$, $x_t = d_t$ (t=1,..., n), $y_t = d_t/M$ (t=1,..., n) è contenuto in P_1 ma non in P_2. Infatti, l'unico w che soddisfi i vincoli $x_t = \sum_{j=t}^{n} w_{tj}$ $(t = 1, \ldots, n)$ è $w_{tt} = d_t$ per $t = 1, \ldots, n$, $w_{ij} = 0$ per $1 \leq i < j \leq n$. Tuttavia tale punto viola il vincolo $w_{tt} \leq d_t y_t$. Pertanto $P_2 \subsetneq P_1$ ■

2 Formulazioni ideali

Ha quindi senso considerare la *formulazione ideale per* X, ovvero la formulazione lineare per X il cui rilassamento lineare abbia la regione ammissibile minimale (rispetto all'inclusione). In quanto segue cerchiamo di rendere formale questo concetto.

Definizione 1 *Un insieme* $P \subset \mathbb{R}^n$ *è detto un* poliedro *se esiste un sistema di vincoli* $Cx \leq d$, $x \geq 0$ *(ove* $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $d \in \mathbb{R}^m$*) tale che* $P = \{x \,|\, Cx \leq d,\, x \geq 0\}$.

Diremo quindi che un poliedro P è una formulazione per l'insieme X se

$$X = \{x \in P \,|\, x_i \in \mathbb{Z} \;\forall i \in I\}.$$

Dunque, dati due poliedri P e P' che siano una formulazione per X, P sará una formulazione migliore di P' se $P \subset P'$.

Ricordiamo che un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è *convesso* se, per ogni coppia di punti $x, y \in C$, il segmento di retta che unisce x e y è tutto contenuto in C. E' facile vedere che ogni poliedro è un insieme convesso.

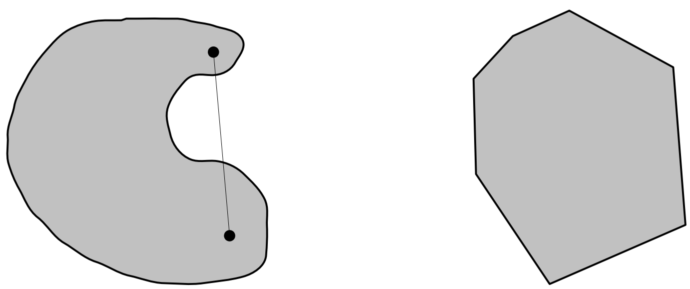


Figura 1: Un insieme non convesso ed uno convesso.

Dato un qualunque insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (nella fattispecie X è l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di programmazione a numeri interi) denotiamo con $\text{conv}(X)$ l'*inviluppo convesso* di X, ovvero l'insieme convesso minimale che contenente X. In altri termini, $\text{conv}(X)$ è l'unico insieme convesso di $\mathbb{R}^n$ tale che $X \subseteq \text{conv}(X)$ e $\text{conv}(X) \subseteq C$ per ogni insieme convesso C che contenga X.

Dunque, data una formulazione $P = \{x \,|\, Cx \leq d,\, x \geq 0\}$ per X, allora, poiché P è un insieme convesso contenente X, avremo che

$$X \subseteq \text{conv}(X) \subseteq P.$$

Dunque $\text{conv}(X)$ deve essere contenuto nella regione ammissibile del rilassamento lineare di qualunque formulazione per X.

Il seguente è un teorema fondamentale in programmazione a numeri interi, e mostra che esiste una formulazione lineare per X il cui rilassamento lineare ha come regione ammissibile esattamente $\text{conv}(X)$.

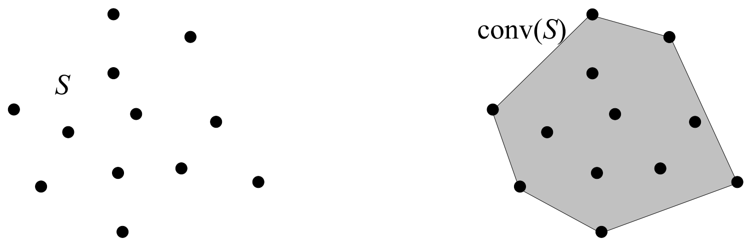


Figura 2: Un insieme ed il suo inviluppo convesso.

Teorema 1 (Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare Intera) *Dati* $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ *e* $b \in \mathbb{Q}^m$, *sia* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$. *Allora* $\text{conv}(X)$ *è un poliedro.*
Ovvero, esistono una matrice $\tilde{A} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m} \times n}$ *e un vettore* $\tilde{b} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m}}$ *tale che*

$$\text{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \tilde{A}x \leq \tilde{b},\, x \geq 0\}.$$

Dati $\tilde{A} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m} \times n}$ e $\tilde{b} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m}}$ tali che $\text{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \tilde{A}x \leq \tilde{b},\, x \geq 0\}$, diremo dunque che $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$ è la *formulazione ideale* per X. Il teorema precedente dimostra che tale formulazione ideale esiste.

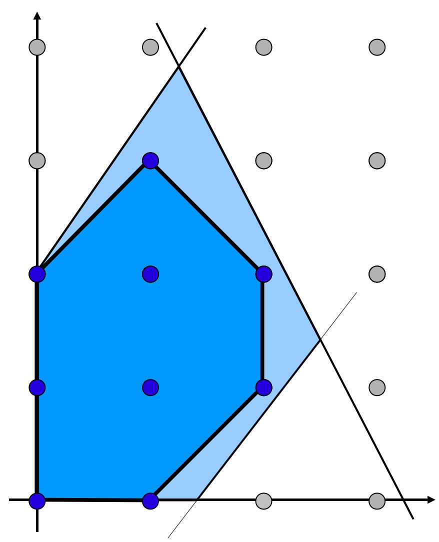


Figura 3: Una formulazione per un insieme di punti interi e la formulazione ideale.

Torniamo al problema a numeri interi:

$$\begin{aligned} z_I = \max c^T x \\ x \in X \end{aligned} \tag{6}$$

ove $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$, per una certa matrice $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ e vettore $b \in \mathbb{Q}^m$ dati.

Sia $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ la formulazione ideale per X, e consideriamo il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \tilde{z} = \max c^T x \\ \tilde{A}x \leq \tilde{b} \\ x \geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Aggiungendo variabili di scarto, otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{z} = \max c^T x \\ \tilde{A}x + Is = \tilde{b} \\ x \geq 0,\, s \geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Sappiamo, dalla teoria della programmazione lineare, che esiste una soluzione ottima (x^*, s^*) per (8) che sia di base per $\tilde{A}x + Is = \tilde{b}$, $x, s \geq 0$. Si noti che, per costruzione $s^* = \tilde{b} - \tilde{A}x^*$. Se $(x^*, s^* = \tilde{b} - \tilde{A}x^*)$ è una soluzione di base di $\tilde{A}x + Is = \tilde{b}$, $x, s \geq 0$, allora diremo che x^* è *una soluzione di base* per $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$. Dunque esiste una soluzione ottima di (7) che sia di base per $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$.

Teorema 2 *Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$. Il sistem $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0$ è la formulazione ideale per X se e solo tutte le sue soluzione di base sono elementi di X. Pertanto, per ogni $c \in \mathbb{R}^n$, vale $z_I = \tilde{z}$.*

Dunque, il teorema precedente implica che risolvere il problema (7) è equivalente a risolvere (6). Infatti, data una soluzione ottima di base x^* per (7) (e dunque abbiamo $\tilde{z} = c^T x^*$), allora per il teorema precedente $x^* \in X$, e dunque x^* è una soluzione ammissibile per il problema di programmazione a numeri interi (6), pertanto $\tilde{z} = c^T x^* \leq z_I$, ma poiché (7) è un rilassamento lineare di (6), vale anche $z_I \leq \tilde{z}$, e dunque $\tilde{z} = z_I$, pertanto x^* è ottima anche per (6).

Dunque, in linea di principio, risolvere un problema di programmazione lineare intera è equivalente a risolvere un problema di programmazione lineare in cui il sistema dei vincoli dia la formulazione ideale. Ci sono però due problemi, che rendono la programmazione lineare intera più difficile della programmazione lineare:

- La formulazione ideale non è nota a priori, e può essere assai difficile da determinare,
- Anche qualora fosse nota, la formulazione ideale potrebbe avere un numero assai elevato di vincoli, e dunque il problema (7) non può essere risolto direttamente con i normali algoritmi per la programmazione lineare (come ad esempio l'algoritmo del simplesso).

Esempio: Matching perfetto di peso minimo.

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Un *matching* di G è un insieme di spigoli $M \subseteq E$ tale che gli elementi di M sono a due a due non-adiacenti. In altre parole,

$M \subseteq E$ è un matching se ogni nodo di G è estremo di al più uno spigolo di G. Un matching M si dice prefetto se ogni nodo di G appartiene ad almeno uno spigolo.

Il problema del matching di peso massimo è il seguente: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, e pesi sugli spigoli $w_e, e \in E$, determinare un matching M di G di peso totale $\sum_{e \in M} w_e$ minimo possibile.

Possiamo scrivere il problema del matching di peso massimo come un problema di programmazione lineare intera come segue. Avremo una variabile decisionale binaria x_e per ogni $e \in E$, ove

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{se } e \text{ è nel matching,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad e \in E.$$

Sia $M = \{e \in \,|\, x_e = 1\}$. Il peso di M sarà dunque dato da

$$\sum_{e \in E} w_e x_e.$$

Affinché M sia un matching, dobbiamo garantire che, per ogni nodo $v \in V$, vi sia esattamente uno spigolo $e \in E$ avente v come estremo tale che $x_e = 1$. Questo può essere espresso mediante il vincolo lineare

$$\sum_{u \in V \ t.c. \ \{u,v\} \in E} x_{\{u,v\}} \leq 1, \quad v \in V.$$

Dunque il problema del matching di peso massimo può essere espresso mediante il problema

$$\begin{array}{lr} \min \ \sum_{e \in E} w_e x_e & \\ \sum_{uv \in E} x_{uv} = 1, \qquad v \in V & \\ 0 \leq x_e \leq 1, \qquad e \in E & \\ x_e \in \mathbb{Z}, \qquad e \in E. & \end{array} \tag{9}$$

Si noti che tale formulazione non è ideale. Ad esempio, si consideri il caso in cui G sia un "triangolo", ovvero $V = \{a, b, c\}$ e $E = \{ab, ac, bc\}$. Siano $w_{ab} = w_{ac} = w_{bc} = 1$. Chiaramente tale grafo non ha alcun matching perfetto. Tuttavia $x^*_{ab} = x^*_{ac} = x^*_{bc} = \frac{1}{2}$ è un soluzione ammissibile del rilassamento lineare di (9).

Possiamo tuttavia ottenere una formulazione migliore della precedente aggiungendo delle disuguaglianze che possiamo "ad-hoc" che possiamo ottenere guardando più attentamente alla struttura del problema.

Si consideri un insieme di nodi $U \subseteq V$ contenente un numero dispari di elementi (ovvero $|U|$ dispari). Dato un qualunque matching M di G, ogni nodo in U è estremo di al più un elemento di M, e ogni elemento di M ha al più due estremi in U. Dunque, il numero di spigoli in M con entrambi gli estremi in U è al più $|U|/2$. Poiché $|U|$ è dispari, e il numero di spigoli in M con entrambi gli estremi in U è un intero, allora M può contenere al più $(|U| - 1)/2$ spigoli con entrambi gli estremi in U. Dunque, ogni punto intero x che soddisfa i vincoli di (9) deve anche soddisfare

$$\sum_{\substack{uv \in E \\ u,v \in U}} x_{u,v} \leq \frac{|U| - 1}{2}, \qquad \text{per ogni } U \subseteq V \text{ tale che } |U| \text{ sia dispari.}$$

Tali disuguaglianze sono dette *odd cut inequalities*.

Ad esempio, nell'esempio precedente del triangolo, V stesso ha cardinalità dispari, e quindi, poiché $(|V|-1)/2 = 1$, vale la disuguaglianza

$$x_{\{ab\}} + x_{\{ac\}} + x_{\{bc\}} \leq 1.$$

Si noti che il punto x^* non soddisfa tale disuguaglianza, poiché $x^*_{\{ab\}} + x^*_{\{ac\}} + x^*_{\{bc\}} = \frac{3}{2} \not\leq 1$.

Dunque la seguente è una formulazione del problema del matching perfetto di peso minimo migliore di (9)

$$\begin{array}{cl} \min \sum_{e\in E} w_e x_e & \\ \sum_{u\in V\, t.c.\, \{u,v\}\in E} x_{\{u,v\}} = 1, & v \in V \\ \sum_{\{u,v\}\in E,\, t.c.\, u,v\in U} x_{\{u,v\}} \leq \frac{|U|-1}{2} & U \subseteq V\ |U| \text{ dispari}, \\ 0 \leq x_e \leq 1, & e \in E \\ x_e \in \mathbb{Z}, & e \in E. \end{array} \tag{10}$$

In effetti, è possibile dimostrare che (10) è la formulazione ideale per il problema del matching perfetto di peso minimo, e che dunque sarebbe sufficiente risolvere il rilassamento lineare di tale formulazione per ottenere l'ottimo del problema intero. Naturalmente, in questo caso il rilassamento lineare ha un numero esponenziale di vincoli (infatti ci sono $2^{|V|-1}$ sottoinsiemi di V di cardinalità dispari) ed è dunque impossibile dal punto di vista pratico risolvere il problema con tutte le odd-cut inequalities (si pensi che per un grafo con soli 40 nodi vi sarebbero già più di 500 miliardi di odd-cut inequalities). Una strategia migliore è quella di risolvere una sequenza di rilassamenti lineari, a partire dal problema (9), aggiungendo una o più odd-cut inequalities alla volta che taglino la soluzione ottima corrente, fino a che non si trovi una soluzione ottima intera.

3 Il metodo dei piani di taglio

L'idea del metodo dei piani di taglio è quella di risolvere una serie di rilassamenti lineari che approssimino via via sempre meglio l'inviluppo convesso della regione ammissibile intorno alla soluzione ottima.

Più formalmente, vogliamo come al solito risolvere il problema di programmazione a numeri interi (P_I)

$$\begin{array}{c} \max c^T x \\ x \in X \end{array} \qquad (P_I)$$

ove $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b,\, x \geq 0,\, x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \in I\}$, per una certa matrice $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ e vettore $b \in \mathbb{Q}^m$ dati.

Diremo che una disuguaglianza lineare $\alpha^T x \leq \beta$, ove $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$, è *valida* per X se, per ogni $x \in X$, $\alpha^T x \leq \beta$ è soddisfatta. Si noti dunque che, se $A'x \leq b'$, $x \geq 0$, è una qualunque formulazione per X, allora anche il sistema ottenuto aggiungendo una disuguaglianza per valida $\alpha^T x \leq \beta$ è una formulazione per X.

Dato $x^* \notin \text{conv}(X)$, diremo che una disuguaglianza valida per X $\alpha^T x \leq \beta$ *taglia* (o *separa*) x^* se $\alpha x^* > \beta$. Dunque, se $A'x \leq b'$, $x \geq 0$ è una qualunque formulazione per X, e x^* è un punto che soddisfa $A'x^* \leq b'$, $x^* \geq 0$, allora data una qualunque disuguaglianza $\alpha^T x \leq \beta$ valida per X che tagli x^*, anche il sistema $A'x \leq b'$, $\alpha^T x \leq \beta$, $x \geq 0$ è una formulazione per X.

Metodo dei piani di taglio

Considera come rilassamento lineare iniziale $\max\{c^T x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}$.

1. Risolvi il rilassamento lineare corrente, e sia x^* la soluzione ottima di base;
2. Se $x^* \in X$, allora x^* è una soluzione ottima di (P_I), STOP.
3. Altrimenti, determina una disuguaglianza $\alpha^T x \leq \beta$ valida per X che tagli x^*;
4. Aggiungi il vincolo $\alpha^T x \leq \beta$ al rilassamento lineare corrente e torna ad 1.

Naturalmente, il metodo dei piani di taglio descritto è un modo generale per affrontare problemi di programmazione lineare intera, ma per implementarlo è necessario fornire un modo automatico per determinare disuguaglianze che taglino la soluzione ottima corrente. Di seguito ne esponiamo uno.

3.1 Tagli di Gomory

Il metodo dei tagli di Gomory è applicabile solo a problemi di programmazione lineare intera pura. Ovvero, consideriamo il problema

$$\begin{aligned} z_I = \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{11}$$

ove $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e vettore $b \in \mathbb{Q}^m$ dati. Sia $X = \{x \mid Ax = b,\, x \geq 0,\, x \in Z^n\}$.

Si risolva il rilassamento lineare di tale problema con il metodo del simplesso, ottenendo alla fine il problema in forma tableau rispetto alla base ottima B (ove con N denotiamo l'insieme di indici delle variabili fuori base)

$$\begin{array}{llllll} \min & z & & & & \\ & -z & & + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j & = & -z_B \\ & & x_{\beta[i]} & + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j & = & \bar{b}_i, \qquad i = 1, \dots, m \\ & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Poiché B è una base ottima, i costi ridotti sono tutti non-negativi, ovvero $\bar{c}_j \geq 0$, $j \in N$. La soluzione ottima x^* di base rispetto alla base B è data da

$$\begin{aligned} x^*_{\beta[i]} &= \bar{b}_i, \quad i = 1, \ldots, m; \\ x^*_j &= 0, \quad j \in N; \end{aligned}$$

pertanto $x^* \in \mathbb{Z}^n$ se e solo se $\bar{b}_i \in \mathbb{Z}$ per $i = 1, \ldots, m$.

Se ciò non avviene, sia $h \in \{1, \ldots, m\}$ un indice tale che $\bar{b}_h \notin \mathbb{Z}$.

Si noti che ogni punto x che soddisfa $Ax = b$, $x \geq 0$, soddisfa anche

$$x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j \leq \bar{b}_h$$

poiché

$$\bar{b}_h = x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j \geq x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j$$

ove la disuguaglianza vale poiché $x_j \geq 0$ e $\bar{a}_{hj} \geq \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor$ per ogni j.

Ora, poiché stiamo risolvendo un problema lineare intero puro, ogni soluzione intera ammissibile di $Ax = b$, $x \geq 0$ soddisfa

$$x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_h \rfloor \tag{12}$$

poiché $x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j$ è un numero intero.

La disuguaglianza (12) è detta *taglio di Gomory*. Dalla precedente discussione, il taglio di Gomory (12) è valido per X, e inoltre si può vedere che taglia la soluzione ottima corrente x^*, poiché

$$x^*_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x^*_j = x^*_{\beta[h]} = \bar{b}_h > \lfloor \bar{b}_h \rfloor$$

ove il fatto che $\bar{b}_h > \lfloor \bar{b}_h \rfloor$ discende dal fatto che $\bar{b}_h$ non è intero.

Risulta conveniente scrivere il taglio di Gomory (12) in forma equivalente. Aggiungendo una variabile di scarto s, il taglio di Gomory (12) diventa

$$x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor x_j + s = \lfloor \bar{b}_h \rfloor, \quad s \geq 0.$$

Si noti che, poiché tutti i coefficienti nell'equazione ottenuta sono interi, allora se x è un vettore con componenti intere, allora anche s deve essere intero. Possiamo dunque richiedere che s sia anch'essa una variabile intera.

Ora, sottraendo alla precedente l'equazione del tableau

$$x_{\beta[h]} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j = \bar{b}_h,$$

si ottiene

$$\sum_{j \in N} (\lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor - a_{hj}) x_j + s = \lfloor \bar{b}_h \rfloor - b_h.$$

Quest'ultima disuguaglianza è detto *taglio di Gomory in forma frazionaria.*

Aggiungendo tale vincolo al tableau ottimo precedente, otteniamo

$$\begin{array}{llllll} \min & z & & & & \\ & -z & + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j & & = & -z_B \\ & & x_{\beta[i]} \quad + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j & & = & \bar{b}_i, \qquad i = 1, \ldots, m \\ & & \sum_{j \in N} (\lfloor \bar{a}_{hj} \rfloor - a_{hj}) x_j & +s & = & \lfloor \bar{b}_h \rfloor - b_h \\ & & x, & s & \geq & 0. \end{array}$$

Si noti che il problema è già in forma tableau rispetto alla base in cui le variabili in base siano $x_{\beta[1]}, \ldots, x_{\beta[m]}, s$, e che tale base è ammissibile nel duale poiché i costi ridotti sono non-negativi (visto che sono i costi ridotti del tableau ottimo del problema precedente, senza il nuovo vincolo).

Si noti inoltre che $\bar{b}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, mentre il termine noto del vincolo in cui s compare è $\lfloor \bar{b}_h \rfloor - b_h < 0$. Possiamo dunque risolvere il problema con il metodo del simplesso duale, ed alla prima iterazione dovremo far uscire la variabile s.

Esempio.

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rrcl} \min z & = & -11x_1 - 4.2x_2 & \\ & & -x_1 + x_2 & \leq 2 \\ & & 8x_1 + 2x_2 & \leq 17 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \text{ intere.} \end{array} \tag{13}$$

Aggiungiamo variabili di scarto x_3 e x_4 per portare il problema in forma standard:

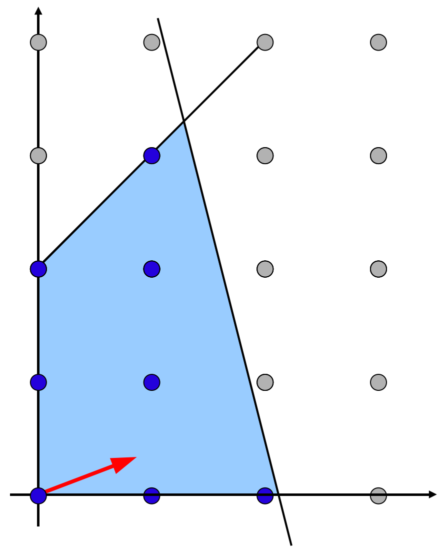
$$\begin{array}{rcl} -z - 11x_1 - 4.2x_2 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 17 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \text{ intere.} \end{array}$$

Risolvendo il rilassamento lineare, otteniamo il tableau:

$$\begin{array}{rrrrrcl} -z & & & +1.16x_3 & +1.52x_4 & = & 28.16 \\ & & x_2 & +0.8x_3 & +0.1x_4 & = & 3.3 \\ & x_1 & & -0.2x_3 & +0.1x_4 & = & 1.3 \end{array}$$

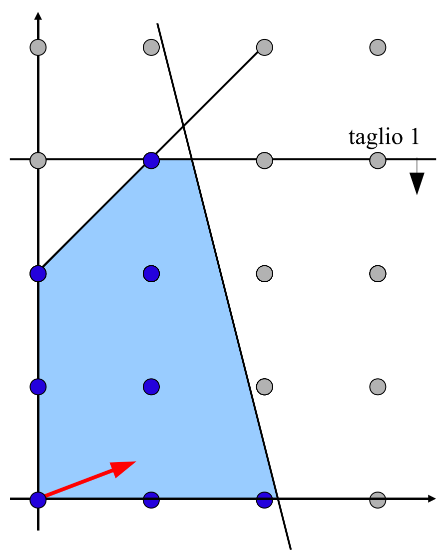
La soluzione di base corrispondente è $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 3.3$ con valore obiettivo $z = -28.16$. Poiché i valori di x_1 e x_2 non sono interi, questa non è una soluzione ammissibile di (13). Possiamo ottenere un taglio di Gomory dall'equazione $x_2 + 0.8x_3 + 0.1x_4 = 3.3$, ottenendo

$$x_2 \leq 3$$



Aggiungendo questo taglio al rilassamento lineare originario, otteniamo una nuova formulazione.

$$\begin{aligned}
&\max\ 11x_1 + 4.2x_2\\
&\qquad -x_1 + x_2 \leq 2\\
&\qquad 8x_1 + 2x_2 \leq 17\\
&\qquad x_2 \leq 3\\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$



Per risolvere questo problema, otteniamo il taglio di Gomory in forma frazionaria, con variabile di scarto x_5, ovvero

$$-0.8x_3 - 0.1x_4 + x_5 = -0.3.$$

Aggiungendolo al tableau ottimo precedente

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
-z & & & +1.16x_3 & +1.52x_4 & & = & 28.16 \\
& & x_2 & +0.8x_3 & +0.1x_4 & & = & 3.3 \\
& x_1 & & -0.2x_3 & +0.1x_4 & & = & 1.3 \\
& & & -0.8x_3 & -0.1x_4 & +x_5 & = & -0.3
\end{array}$$

Risolvendo con il simplesso duale, facciamo uscire di base x_5, mentre entra in base x_3, poiché $\min\{1.16/0.8, 1.52/0.1\} = 1.16/0.8$.

Otteniamo il tableau ottimo

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-z & & & & +1.375x_4 & +1.45x_5 & = & 27.725 \\
& & x_2 & & & +x_5 & = & 3 \\
& x_1 & & & +0.125x_4 & -0.25x_5 & = & 1.375 \\
& & & x_3 & +0.125x_4 & -1.25x_5 & = & 0.375
\end{array}$$

La soluzione di base è $x_1 = 1.375$, $x_2 = 3$ $x_3 = 0.375$, con valore $z = 27.725$.

Dall'equazione $x_3+0.125x_4-1.25x_5 = 0.375$ del tableau, otteniamo il taglio di Gomory

$$x_3 - 2x_5 \leq 0$$

che, poiché $x_3 = 2 + x_1 - x_2$ e $x_5 = 3 - x_2$, nello spazio (x_1, x_2) è espresso da

$$x_1 + x_2 \leq 4.$$

Aggiungendo questo vincolo al problema originale, otteniamo il nuovo rilassamento lineare

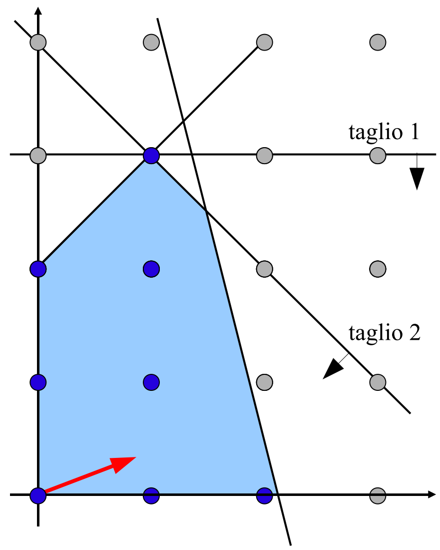
$$\begin{array}{l}
\max\ 11x_1 + 4.2x_2 \\
\quad -x_1 + x_2 \leq 2 \\
\quad 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\
\quad x_2 \leq 3 \\
\quad x_1 + x_2 \leq 4 \\
\quad x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}$$

Il taglio di Gomory in forma frazionaria è

$$-0.125x_4 - 0.75x_5 + x_6 = -0.375$$

Aggiungendo il taglio al tableau ottimo precedente, otteniamo

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
-z & & & & +1.375x_4 & +1.45x_5 & & = & 27.725 \\
& & x_2 & & & +x_5 & & = & 3 \\
& x_1 & & & +0.125x_4 & -0.25x_5 & & = & 1.375 \\
& & & x_3 & +0.125x_4 & -1.25x_5 & & = & 0.375 \\
& & & & -0.125x_4 & -0.75x_5 & +x_6 & = & -0.375
\end{array}$$



Dobbiamo far uscire di base x_6, e far entrare in base x_5, ottenendo il tableau ottimo

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
-z & & & & +17/15x_4 & & +29/15x_6 & = & 27 \\
& x_2 & & & -1/6x_4 & & +4/3x_6 & = & 2.5 \\
x_1 & & & & +1/6x_4 & & -1/3x_6 & = & 1.5 \\
& & x_3 & & & & +x_6 & = & 0 \\
& & & & 1/6x_4 & +x_5 & -4/3x_6 & = & 0.5
\end{array}$$

Dunque la soluzione ottima è $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$ con valore $z = 27$.

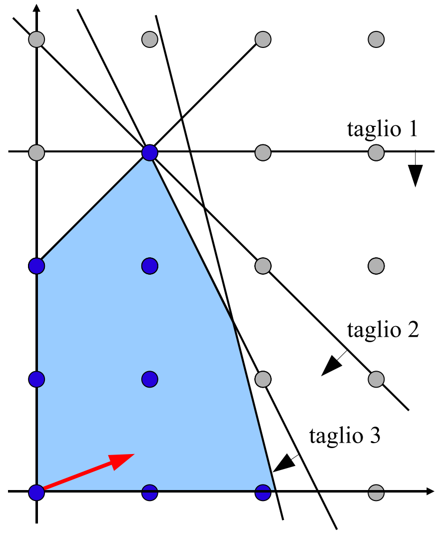
Dall'equazione $1/6x_4 + x_5 - 4/3x_6 = 0.5$ del tableau, otteniamo il taglio di Gomory $x_5 - 2x_6 \leq 0$ che, poiché $x_5 = 3 - x_2$ e $x_6 = 4 - x_1 - x_2$, nello spazio (x_1, x_2) è espresso da $2x_1 + x_2 \leq 5$. Il nuovo rilassamento lineare è

$$\begin{array}{ll}
\max & 11x_1 + 4.2x_2 \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}$$

Il taglio di Gomory in forma frazionaria è

$$-1/6x_4 - 2/3x_6 + x_7 = -0.5$$

Per risolvere il nuovo rilassamento, aggiungiamo il taglio al tableau ottimo precedente,



ottenendo

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
-z & & & & +17/15x_4 & & +29/15x_6 & & = & 27 \\
 & x_2 & & & -1/6x_4 & & +4/3x_6 & & = & 2.5 \\
 & & x_1 & & +1/6x_4 & & -1/3x_6 & & = & 1.5 \\
 & & & x_3 & & & +x_6 & & = & 0 \\
 & & & & 1/6x_4 & +x_5 & -4/3x_6 & & = & 0.5 \\
 & & & & -1/6x_4 & & -2/3x_6 & +x_7 & = & -0.5
\end{array}
$$

Dobbiamo fare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per arrivare all'ottimo: nella prima esce di base x_7 ed entra x_6, nella seconda esce x_3 ed entra x_4, ottenendo così il tableau ottimo:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
-z & & & +13/15x_3 & & & & +76/15x_7 & = & 23,6 \\
 & x_2 & & +2/3x_3 & & & & +1/3x_7 & = & 3 \\
 & & x_1 & -1/3x_3 & & & & +1/3x_7 & = & 1 \\
 & & & 4/3x_3 & +x_4 & & & -10/3x_7 & = & 3 \\
 & & & -2/3x_3 & & +x_5 & & -1/3x_7 & = & 0 \\
 & & & -1/3x_4 & & & x_6 & -2/3x_7 & = & 0
\end{array}
$$

Dunque la soluzione ottima è $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ con valore $z = 23.6$. Questa è dunque la soluzione ottima intera del problema.