

Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Problema dell'assegnamento e matrici totalmente unimodulari

L. De Giovanni G. Zambelli

1 Problema dell'assegnamento

Sia dato un grafo non orientato bipartito $G = (V, E)$, ove V denota l'insieme dei nodi di G e E l'insieme degli spigoli.

Ricordiamo che G bipartito significa che V può essere partizionato in due sottoinsiemi disgiunti V_1, V_2 tali che, per ogni spigolo $\{u, v\} \in E$, esattamente uno tra u e v è in V_1 .

Nel problema dell'assegnamento abbiamo $|V_1| = |V_2|$ e costi c_{uv} su ogni spigolo $\{u, v\} \in E$, e vogliamo assegnare ad ogni nodo u in V_1 esattamente un nodo adiacente v in V_2 , in modo che ogni nodo in V_2 sia assegnato ad un nodo in V_1 e che la somma dei costi sugli spigoli selezionati sia minima possibile.

Dunque, avremo una variabile binaria x_{uv} per ogni $u \in V_1, v \in V_2$ tali che $\{u, v\} \in E$, ove

$$x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ è assegnato a } v, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il costo totale di un assegnamento determinato da x è dunque

$$\sum_{\{uv\} \in E} c_{uv} x_{uv}.$$

Il fatto che ad ogni nodo u in V_1 sia assegnato un nodo adiacente $v \in V_2$ è espresso dai vincoli

$$\sum_{\{u,v\} \in E} x_{uv} = 1, \quad u \in V_1,$$

mentre il fatto che ogni nodo $v \in V_2$ sia assegnato ad un nodo adiacente $u \in V_1$ è espresso dai vincoli

$$\sum_{\{u,v\} \in E} x_{uv} = 1, \quad v \in V_2.$$

Il problema dell'assegnamento può dunque essere scritto come il problema di programmazione lineare intera

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{\{uv\} \in E} c_{uv} x_{uv} \\
 \sum_{v: \{u,v\} \in E} x_{uv} &= 1, \quad u \in V_1, \\
 \sum_{u: \{u,v\} \in E} x_{uv} &= 1, \quad v \in V_2, \\
 x_{uv} &\geq 0, \quad \{u,v\} \in E \\
 x_{uv} &\in \mathbb{Z}, \quad \{u,v\} \in E
 \end{aligned} \tag{1}$$

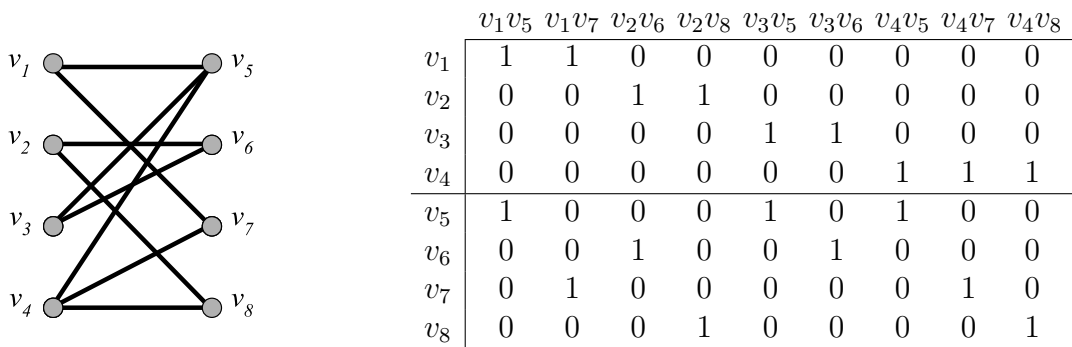
Si noti che non è necessario includere i vincoli $x_{uv} \leq 1$ per ogni $\{u,v\} \in E$, in quanto sono implicati dai vincoli del sistema.

Vogliamo esprimere il problema precedente in termini di matrici.

Definizione 1 Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ (non necessariamente bipartito), la matrice di incidenza di G è la matrice $0,1$ $A(G)$ con $|V|$ righe e $|E|$ colonne, ove l'elemento $a_{v,e}$ nella riga di $A(G)$ corrispondente al nodo v e nella colonna di $A(G)$ corrispondente allo spigolo e vale

$$a_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{se } v \in e, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che ogni colonna di $A(G)$ ha esattamente 2 entrate di valore 1, e tutte le altre 0. Inoltre, se G è bipartito, allora ogni colonna di $A(G)$ ha esattamente una entrata di valore 1 nelle righe di $A(G)$ corrispondenti ai nodi in V_1 , e una entrata di valore 1 nelle righe di $A(G)$ corrispondenti ai nodi in V_2 . La figura seguente mostra l'esempio di un grafo bipartito e della sua matrice di incidenza.



Dunque, è facile verificare che il problema dell'assegnamento può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned}
 \max \quad & c^T x \\
 A(G) x &= \mathbf{1} \\
 x &\geq 0 \\
 x &\in \mathbb{Z}^{|E|},
 \end{aligned}$$

ove con $\mathbf{1}$ denotiamo il vettore con tutte le componenti uguali ad 1.

In quanto segue, osserveremo che nel precedente problema i vincoli di interezza possono essere rimossi, in quanto la formulazione data è ideale. In altri termini, dimostreremo che tutte le soluzioni di base del sistema $A(G) x = \mathbf{1}$, $x \geq 0$, sono tutte intere. Questo seguirà da una proprietà fondamentale della matrici di incidenza dei grafi bipartiti: la totale unimodularità.

2 Matrici Totalmente Unimodulari

Dato un vettore o una matrice, diremo che tale vettore o matrice è *intero* se tutte le sue componenti sono intere.

Definizione 2 Una matrice A si dice totalmente unimodulare se, per ogni sottomatrice quadrata B di A , $\det(B) \in \{0, +1, -1\}$.

Si noti che, poiché ogni componente di A è una matrice quadrata 1×1 , allora ogni matrice totalmente unimodulare ha componenti con valore 0, +1 o -1.

Ricordiamo il seguente fatto di algebra lineare. Data una matrice quadrata $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e dati indici $i, j \in \{1, \dots, m\}$, denotiamo con B^{ji} la matrice ottenuta da B rimuovendo la riga j -esima e la colonna i -esima. Se B è non-singolare, allora l'entrata (i, j) della matrice inversa di B è

$$(B^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{\det(B^{ji})}{\det(B)}.$$

In particolare, ciò implica che, se B è intera, allora tutte le entrate di B^{-1} sono numeri interi divisi per il determinante di B . Dunque, se B è intera e $\det(B) = \pm 1$, allora B^{-1} è una matrice intera. In particolar modo, se A è una matrice totalmente unimodulare, allora, per ogni sottomatrice quadrata non-singolare B di A , B^{-1} è intera. In particolare, se A è totalmente unimodulare $\det(B^{ij}) \in \{0, +1, -1\}$, pertanto B^{-1} è una matrice con componenti in $\{0, +1, -1\}$.

Teorema 1 Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice totalmente unimodulare, e $b \in \mathbb{R}^m$ un vettore intero. Allora tutte le soluzioni di base del sistema

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

sono intere.

Dimostrazione: Data una base B di A , la soluzione di base \bar{x} di $Ax = b$, $x \geq 0$ associata a B è

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_F &= 0. \end{aligned}$$

Poiché A è totalmente unimodulare, dalla precedente discussione B^{-1} è una matrice intera. Siccome stiamo assumendo che b sia un vettore intero, allora $B^{-1}b$ è un vettore intero, e dunque \bar{x} è un vettore intero. \square

Teorema 2 *Sia A una matrice con tutte le componenti in $\{0, +1\}$ tale che ogni colonna di A abbia al più due entrate di valore 1. Se le righe di A possono essere partizionate in due insiemi V_1 e V_2 tali che ogni colonna di A abbia al più una componente ad 1 nelle righe di V_1 ed al più una componente ad 1 nelle righe di V_2 , allora A è totalmente unimodulare.*

Dimostrazione: Sia B una sottomatrice quadrata di A di ordine k . Dimostriamo, per induzione su k , che B ha determinante $0, \pm 1$. Se $k = 1$, allora B ha un'unica componente di valore 0 o 1, e dunque $\det(B) \in \{0, 1\}$. Supponiamo dunque che $k \geq 2$, e che ogni sotto-matrice quadrata di A di ordine $k - 1$ abbia determinante $0, \pm 1$. Si noti che ogni colonna di B ha al più due componenti di valore 1. Consideriamo tre casi.

a) *B ha almeno una colonna di tutti zeri.* In tal caso $\det(B) = 0$.

b) *B ha almeno una colonna con esattamente una componente ad 1.* Supponiamo che la j -esima colonna di B abbia unica componente di valore 1, diciamo la componente i -esima, e tutte le altre di valore 0. Per la nota regola di Laplace per calcolare i determinanti, se B' è la sotto-matrice di B ottenuta rimuovendo la riga i -esima e la colonna j -esima, abbiamo $\det(B) = (-1)^{i+j} \det(B')$. Per induzione, $\det(B') \in \{0, +1, -1\}$, e dunque $\det(B) = (-1)^{i+j} \det(B') \in \{0, +1, -1\}$.

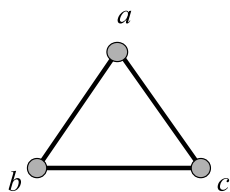
c) *Tutte le colonne di B hanno esattamente due componenti ad 1.* In tal caso, per le ipotesi del teorema, ogni colonna di A ha una componente di valore 1 nelle righe di V_1 ed una componente di valore 1 nelle righe di V_2 . Dunque la somma di tutte le righe di B in V_1 meno la somma di tutte le righe di B in V_2 dà il vettore nullo. Pertanto, in tal caso le righe di B sono linearmente dipendenti, e dunque $\det(B) = 0$. \square

Corollario 1 *La matrice di incidenza di un grafo bipartito è totalmente unimodulare.*

Dimostrazione: Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito e V_1, V_2 sia la bipartizione dei nodi di G tale che ogni spigolo ha un estremo in V_1 e l'altro in V_2 . Allora ogni colonna di $A(G)$ ha una componente ad 1 nelle righe corrispondenti ad elementi di V_1 ed una componente ad 1 nelle righe corrispondenti ad elementi di V_2 . Dunque $A(G)$ è totalmente unimodulare per il Teorema 2 \square

Dunque, il Teorema 1 e il Corollario 1 implicano che tutte le soluzioni di base di (1) sono intere.

Si noti che l'ipotesi nel Corollario 1 che il grafo sia bipartito è fondamentale. Ad esempio, si consideri il grafo



	ab	ac	bc
a	1	1	0
b	1	0	1
c	0	1	1

Si noti che la matrice precedente ha determinante -2 , e dunque non è totalmente unimodulare.

Ci sono varie operazioni che mantengono la totale unimodularità. Ad esempio, se A è una matrice totalmente unimodulare $m \times n$, allora

1. Ogni matrice ottenuta da A permutando righe e colonne è totalmente unimodulare,
2. Ogni matrice ottenuta da A moltiplicando righe e colonne per -1 è totalmente unimodulare,
3. A^T è totalmente unimodulare,
4. La matrice (A, I) è totalmente unimodulare (ove I sia la matrice identità $m \times m$),
5. La matrice $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ è totalmente unimodulare (ove I sia la matrice identità $n \times n$).

I fatti 1,2 sono immediati, poiché se B è una matrice quadrata e B' è ottenuta da B permutando righe e colonne o moltiplicandole per -1 , allora $\det(B') = \pm \det(B)$. Il punto 3 discende dal fatto che $\det(B) = \det(B^T)$. Il punto 5 discende da 3 e 4. Per dimostrare il punto 4, si consideri una sottomatrice quadrata B di (A, I) . A meno di permutazioni di righe, possiamo scrivere B come

$$\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline D & I \end{array} \right)$$

ove $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ è una sotto-matrice di A . Dunque, per note regole del calcolo dei determinanti $\det(B) = \det(C)$, e dunque $\det(B) = 0, \pm 1$ poiché C è una sotto-matrice di A ed A è totalmente unimodulare.

Dunque, i fatti precedenti insieme al Teorema 1 implicano il seguente.

Teorema 3 *Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice totalmente unimodulare, e $b \in \mathbb{R}^m$ un vettore intero. Allora tutte le soluzioni di base del sistema*

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

sono intere.

Dimostrazione: Un punto \bar{x} è di base per il sistema nell'enunciato se il punto (\bar{x}, \bar{s}) , ove $\bar{s} = b - A\bar{x}$, è di base per il sistema in forma standard

$$\begin{aligned} Ax + Is &= b \\ x \geq 0, s &\geq 0. \end{aligned}$$

Poiché, per il punto 4., la matrice dei vincoli di uguaglianza è totalmente unimodulare, allora (\bar{x}, \bar{s}) è intera, e dunque \bar{x} è un vettore intero. \square

Problema dei trasporti Sia dato un grafo non orientato bipartito $G = (V, E)$, e sia V_1, V_2 una partizione di V tale che ogni spigolo di G abbia un estremo in V_1 e l'altro in V_2 .

Per ogni nodo $u \in V_1$, sia $d_u \in \mathbb{Z}$ la quantità che può essere inviata da u ai nodi in V_2 , e per ogni nodo $v \in V_2$ sia $r_v \in \mathbb{Z}$ la quantità richiesta al nodo v . Per ogni $e = \{u, v\} \in E$, $u \in V_1$, sia c_e il costo unitario di trasporto da u a v . Vogliamo spedire dai nodi di V_1 ai nodi di V_2 lungo gli spigoli di G a costo minimo, in modo da soddisfare le domande dei nodi in V_2 , e in modo che la quantità totale spedita da ogni nodo $u \in V_1$ non ecceda d_u . Questo è il *problema dei trasporti*, che può essere formulato come

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\{uv\} \in E} c_{uv} x_{uv} \\ & \sum_{v: \{u,v\} \in E} x_{uv} \leq d_u, \quad u \in V_1, \\ & \sum_{u: \{u,v\} \in E} x_{uv} \geq r_v, \quad v \in V_2, \\ & x_{uv} \geq 0, \quad \{u, v\} \in E \\ & x_{uv} \in \mathbb{Z}, \quad \{u, v\} \in E \end{aligned} \tag{2}$$

ove x_{uv} rappresenta il numero di unità spedite da $u \in V_1$ a $v \in V_2$.

Per i Teoremi 2 e 3, tutte le soluzioni di base del sistema precedente sono intere, e dunque il rilassamento lineare del problema ha una soluzione ottima intera.

Matrici di incidenza di grafi orientati Dato un grafo orientato $D = (V, A)$, la *matrice di incidenza di D* è la matrice $A(D)$ con componenti in $\{0, +1, -1\}$ con $|V|$ righe e $|A|$ colonne, ove, per ogni arco $e = (v, w)$ l'elemento $a_{u,e}$ nella riga di $A(D)$ corrispondente al nodo u e nella colonna di $A(D)$ corrispondente all'arco e vale

$$a_{u,e} = \begin{cases} -1 & \text{se } u = v, \\ 1 & \text{se } u = w, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Teorema 4 *La matrice di incidenza di un grafo orientato è totalmente unimodulare.*

La dimostrazione del Teorema 4 è praticamente identica a quella del Teorema 2: l'unica differenza è che, se B è una sottomatrice quadrata di $A(D)$ in cui ogni colonna di B ha esattamente due componenti non-nulle, allora la somma di tutte le righe di B dà il vettore nullo, pertanto in tal caso le righe di B sono linearmente dipendenti, e dunque $\det(B) = 0$.