

Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Descrizione di dettaglio dei problemi

Luigi De Giovanni

Trovate di seguito la descrizione formale del problema proposto per il progetto. La descrizione è piuttosto dettagliata, perché prova a rispondere a varie possibili ambiguità messe in luce da una o più delle vostre proposte (qualcosa potrà sembrarvi ovvio, ma per qualcuno di voi non lo era).

ATTENZIONE!

La **prossima scadenza** è relativa alla consegna di un modello di programmazione lineare intera (mista) che risponda a queste specifiche (e non a quelle che ciascuno di voi aveva formulato).

Il termine è fissato per **lunedì 7 novembre, ore 9:00 AM**.

Nota: non sono vietati (anzi sono incoraggiati) la ricerca e l'adattamento di modelli che si trovino nella letteratura scientifica (si può copiare da un articolo scientifico, non dal collega...). In ogni caso, dopo la seconda consegna, il docente metterà a disposizione un modello di riferimento per tutti, da implementare con Cplex.

1 Turnazione di Farmacie

Il problema richiede la definizione dei *turni* delle farmacie nei giorni festivi a partire da *dati semplificati* riguardanti farmacie, utenti e loro localizzazione sul territorio. Si richiede inoltre che i turni siano *equi* e che sia ottimizzata una misura di *accessibilità* delle rete festiva di farmacie, legata alla distanza potenzialmente percorsa dagli utenti per servirsi dalla farmacia aperta più vicina. Cerchiamo quindi di chiarire:

- quali siano i dati disponibili;
- cosa intendiamo per “turni festivi”;
- cosa intendiamo per “equità dei turni”;
- come misuriamo l’accessibilità della rete.

Di seguito daremo dei dettagli su questi punti, aiutandoci con un esempio.

1.1 Dati disponibili

La federazione dei farmacisti ci mette a disposizione le seguenti informazioni:

- suddivisione (fittizia) del territorio in centroidi. Un centroide è una sottoregione di riferimento statistico per la raccolta e l’elaborazione di dati territoriali. Nel nostro caso, per ogni utente e per ogni farmacia è definito un centroide di riferimento: si assume quindi che non ci siano utenti e farmacie al di fuori dei centroidi. Indichiamo con C l’insieme dei centroidi;
- per ogni centroide, il numero complessivo di utenti e il numero complessivo delle farmacie. Si noti che il numero di farmacie e/o il numero di utenti in un centroide potrebbe essere anche 0 (centroidi che hanno sia il numero di utenti sia il numero di farmacie pari a 0 possono essere trascurati). Indichiamo con U_i e R_i il numero di utenti e farmacie (rispettivamente) nel centroide $i \in C$;
- per ogni coppia ordinata di centroidi, la distanza che li separa. Si noti che l’informazione è data per coppie *ordinate*, e quindi è possibile che la distanza per andare dal centroide a al centroide b sia diversa dalla distanza per andare da b a a . Si assume che tutti gli elementi (farmacie e utenti) afferenti ad uno stesso centroide siano a distanza trascurabile tra loro e, quindi, si può immaginare che tutti questi elementi siano concentrati in uno stesso punto. Di conseguenza, per misurare, ad esempio, la distanza tra un utente afferente al centroide a e una farmacia afferente al centroide b è sufficiente considerare la distanza (data) tra a e b . Indichiamo con c_{ij} la distanza per andare da $i \in C$ a $j \in C$;
- il numero di turni in cui si vuole organizzare il servizio festivo. Tale numero è definito dalla federazione in base a criteri che non sono sotto il nostro controllo. Indichiamo con T il numero di turni.

Proponiamo un esempio in cui i dati sono descritti in forma tabellare: una tabella con le informazioni sui centroidi (Tabella 1) e una tabella corrispondente a una matrice di distanze tra centroidi (Tabella 2):

Centroide (i)	numero utenti (U_i)	numero farmacie (R_i)
A	578	2
B	976	3
C	367	1
D	984	4
E	392	1
F	865	2
G	278	0

Table 1: Numero di utenti e farmacie per centroide

c_{ij}	A	B	C	D	E	F	G
A	0	3.0	1.9	10.5	11.3	1.0	3.3
B	3.4	0	7.4	2.5	6.3	2.7	9.7
C	1.7	7.4	0	4.5	8.5	4.6	6.8
D	10.5	2.4	4.5	0	4.3	1.7	4.2
E	11.6	6.2	8.9	4.3	0	1.8	10.3
F	0.9	2.7	4.2	1.8	2.0	0	8.7
G	3.2	9.8	6.8	3.9	10.3	8.4	0

Table 2: Distanze tra centroidi

1.2 Definizione di turno ed equità dei turni (soluzioni ammissibili)

La definizione dei turni delle farmacie consiste nello stabilire quali farmacie sono aperte nei diversi giorni festivi. Un turno è quindi un sottoinsieme di farmacie che sono aperte nello stesso giorno festivo. Trattandosi di una pianificazione di lungo periodo ed essendo stabilito a priori il numero di turni, si assume che i turni siano ripetuti ciclicamente per tutti i giorni festivi. Più precisamente, se T è il numero di turni, e F è l'insieme delle farmacie, si dovranno stabilire T sottoinsiemi di farmacie $F_i \subseteq F$, $i = 1..T$ corrispondenti ai turni. Il turno (sottoinsieme) F_1 corrisponde alle farmacie che saranno aperte il primo giorno festivo, F_2 il secondo giorno festivo e così via fino al turno F_T ; il giorno festivo $T + 1$ sarà coperto di nuovo dal turno F_1 , il giorno festivo $T + 2$ dal turno F_2 e così via, ciclicamente.

Per quanto riguarda l'ammissibilità e l'equità dei turni, vogliamo che i sottoinsiemi di farmacie F_i rispondano ai seguenti requisiti:

- il numero dei turni sia quello stabilito dalla federazione: bisogna definire esattamente T sottoinsiemi F_i , $i = 1..T$;

- tutte le farmacie dovranno partecipare alla turnazione: $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_T = F$;
- nessuna farmacia deve partecipare a più di un turno: $F_i \cap F_j = \emptyset \forall i, j \in F$. Si noti che questo requisito, insieme al precedente corrispondono a dire che i turni devono definire una partizione (in senso insiemistico) delle farmacie: in altre parole, ogni farmacia dovrà far parte di uno e un solo turno;
- ogni farmacia dovrà essere aperta a intervalli regolari. Questo vincolo è automaticamente soddisfatto dalla definizione dei turni. Infatti, visto che i ogni farmacia fa parte di uno (e un solo) turno, e che i turni si ripetono ciclicamente, ciascuna farmacia sarà aperta un turno e chiusa per $T - 1$ turni. Si considera trascurabile il fatto gli intervalli temporali tra i giorni festivi non siano regolari, cosicché il numero effettivo di giorni tra due aperture consecutive potrebbe variare: assumiamo che sia il numero di turni tra due aperture consecutive ad essere importante;
- il numero di farmacie per turno deve essere *il più possibile* lo stesso. Quindi, se il numero totale di farmacie $|F|$ è un multiplo intero del numero stabilito di turni T , tale requisito corrisponde ad avere un numero di farmacie per ogni turno pari a $|F|/T$. Altrimenti, dobbiamo ammettere che i turni abbiamo un numero di farmacie diverso; per matenerlo il più possibile lo stesso, ammettiamo che il numero di farmacie tra due turni possa differire al massimo di uno¹.

Le soluzioni ammissibili del problema corrispondono quindi a ripartizioni delle farmacie in turni che soddisfano *tutti* i requisiti sopra dati (turni equi).

Con riferimento all'esempio precedente, esplicitiamo l'insieme delle farmacie come segue

$$F = \{f_{a1}, f_{a2}, f_{b1}, f_{b2}, f_{b3}, f_{c1}, f_{d1}, f_{d2}, f_{d3}, f_{d4}, f_{e1}, f_{f1}, f_{f2}\}$$

assumendo che f_{Xi} sia l' i -esima farmacie nel centroide X . Sia il numero di turni predefinito $T = 4$. Le seguenti suddivisioni in turni

$$\{f_{a1}, f_{a2}, f_{b1}, f_{b2}\}, \{f_{b3}, f_{c1}, f_{d1}\}, \{f_{d2}, f_{d3}, f_{d4}\}, \{f_{e1}, f_{f1}, f_{f2}\}$$

$$\{f_{a1}, f_{b1}, f_{d4}\}, \{f_{b2}, f_{d1}, f_{f1}\}, \{f_{d3}, f_{e1}, f_{f2}\}, \{f_{a2}, f_{b3}, f_{c1}, f_{d2}\}$$

sono entrambe ammissibili e eque, secondo la definizione sopra data. Le seguenti suddivisioni non sono invece ammissibili:

$$\{f_{a1}, f_{b1}, f_{d4}\}, \{f_{b2}, f_{d1}, f_{f1}\}, \{f_{d3}, f_{e1}, f_{f2}\}, \{f_{a2}, f_{b3}, f_{c1}\}$$

(manca la farmacia f_{d2}),

$$\{f_{a1}, f_{b1}, f_{d4}\}, \{f_{b2}, f_{d1}, f_{f1}\}, \{f_{b3}, f_{d3}, f_{e1}, f_{f2}\}, \{f_{a2}, f_{b3}, f_{c1}, f_{d2}\}$$

(la farmacia f_{b3} appare in due turni),

$$\{f_{a2}, f_{b1}, f_{d4}\}, \{f_{b2}, f_{d1}, f_{f1}\}, \{f_{a1}, f_{b3}, f_{d3}, f_{e1}, f_{f2}\}, \{f_{c1}, f_{d2}\}$$

(ci sono turni con 2, 3 e 5 farmacie).

¹Si noti che questo è sempre possibile in quanto, costruendo T turni con $\lfloor |F|/T \rfloor$ farmacie. Le farmacie rimanenti sono in numero inferiore a T (il resto della divisione) e saranno poste tutte in turni diversi, aumentando quindi di una sola unità il numero di farmacie in alcuni turni.

1.3 Accessibilità della rete festiva e funzione obiettivo

La federazione dei farmacisti vuole che l'organizzazione dei turni festivi venga il più possibile incontro alle esigenze degli utenti e quindi vuole aumentare il livello di accessibilità della rete festiva di farmacie. Si lega il concetto di accessibilità al concetto di vicinanza delle farmacie, mentre si trascurano tutte le problematiche relative alla congestione delle farmacie, alla disponibilità dei farmaci nella farmacia di riferimento etc. Più precisamente, ciascuna delle soluzioni ammissibili (turni equi) può essere valutata calcolando la distanza complessiva potenzialmente percorsa da tutti gli utenti in tutti i giorni festivi. Per semplicità, si considera la distanza percorsa dagli utenti sotto le seguenti assunzioni:

- ciascun utente si rivolge alla farmacia aperta più vicina;
- si trascurano altri fattori di preferenza (possibile congestione della farmacia, attrattività della farmacia, abitudini degli utenti, simpatia del farmacista etc.);
- si assume che ogni utente si serva comunque dalla farmacia più vicina (ad esempio, trovi il prodotto che cerca) e quindi non debba muoversi verso altre farmacie;
- tutti gli utenti sono potenzialmente interessati all'utilizzo delle farmacie: la distanza percorsa dovrà essere pesata dal numero di utenti che la percorrono (numero di utenti in ciascun centroide);
- vista la ciclicità dei turni, è possibile limitarsi al calcolo della distanza in un solo ciclo di turni (i primi T turni).

In sintesi, data una soluzione S del problema, cioè una suddivisione delle farmacie in turni equi F_k , $k = 1..T$, indicando con d_{ik} la distanza dal centroide $i \in C$ alla farmacia più vicina nel turno k , la valutazione della soluzione stessa è

$$V(S) = \sum_{k=1}^T \sum_{i \in C} U_i d_{ik}$$

dove, indicando con $j_f \in C$ il centroide della farmacia $f \in F$, d_{ik} è ottenuta come:

$$d_{ik} = \min_{f \in F_k} \{c_{ij_f}\}.$$

L'obiettivo è quindi quello di minimizzare, su tutte le soluzioni S rappresentanti turni ammissibili, la distanza complessiva $V(S)$ coperta dagli utenti, come sopra definita.

Si riporta di seguito la Tabella 3 dei d_{ik} relativi alla prima soluzione proposta.

Centroide	Turno 1	Turno 2	Turno 3	Turno 4
A	0	1.9	10.5	1.0
B	0	0	2.5	2.7
C	1.7	0	4.5	4.6
D	2.4	0	0	1.7
E	6.2	4.3	4.3	0
F	0.9	1.8	1.8	0
G	3.2	3.9	3.9	8.4

Table 3: Valutazione della prima soluzione ammissibile proposta.

La valutazione complessiva della prima soluzione è quindi 35905.7 (ottenuta pesando i d_{ik} per i relativi U_i).

Per la seconda soluzione, i d_{ik} sono riportati in Tabella 4.

Centroide	Turno 1	Turno 2	Turno 3	Turno 4
A	0	1.0	1.0	0
B	0	0	2.5	0
C	1.7	4.5	4.5	0
D	0	0	0	0
E	4.3	1.8	0	4.3
F	0.9	0	0	0.9
G	3.2	3.9	3.9	3.2

Table 4: Valutazione della seconda soluzione ammissibile proposta.

La valutazione complessiva della seconda soluzione è quindi 17104.3 e, pertanto, è migliore della prima.

1.4 Nota importante: possibile definizione alternativa dei turni

Qualcuno di voi, nelle specifiche, ha scritto che, essendo le farmacie localizzate in uno stesso centroide tra loro equivalenti, la turnazione può essere espressa in termini di centroidi anziché di farmacie. Questo paragrafo è dedicato a loro (se non vi è chiaro, non fa niente!). L'intuizione è senz'altro valida, visto che trascuriamo problematiche legate alla congestione e tutti i criteri di scelta che non dipendano dalla distanza (e quindi dal centroide di appartenenza). Pertanto, in fase di modellazione, è possibile adottare una diversa definizione dei turni. Ciascun turno è definito dicendo quante farmacie di un dato centroide ne fanno parte.

Nell'esempio dato, le prime due suddivisioni in turni (quelle ammissibili) sono sintetizzate nella seguente Tabella 5, indicante, per ciascun centroide e turno, il numero di farmacie che dovranno rimanere aperte:

Centroide	Soluz. 1				Soluz. 2			
	Turno 1	Turno 2	Turno 3	Turno 4	Turno 1	Turno 2	Turno 3	Turno 4
A	2	0	0	0	1	0	0	1
B	2	1	0	0	1	1	0	1
C	0	1	0	0	0	0	0	1
D	0	1	3	0	1	1	1	1
E	0	0	0	1	0	0	1	0
F	0	0	0	2	0	1	1	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 5: Definizione alternativa dei turni sui centroidi.

Chiaramente, affinché i turni siano ammissibili e equi, è necessario che:

- ci siano esattamente T turni;
- la somma del numero di farmacie su tutti i turni e tutti i centroidi sia esattamente pari al numero complessivo di farmacie (tutte le farmacie aprono in uno e un solo turno);
- dati due qualsiasi turni, il numero complessivo di farmacie per turno (somma sulle colonne della tabella) deve differire di al più una unità (turni bilanciati);
- il numero complessivo di farmacie per il centroide $i \in C$ (somma per righe) deve essere uguale a R_i .

Una volta definiti i turni come sopra, la scelta di quali farmacie specifiche aprire in ogni turno può essere arbitraria, a patto che non si scelga due volte la stessa farmacia (lasciando così qualche farmacia senza turno).

Per quanto riguarda la valutazione delle soluzioni, vale quanto detto sopra, con la sola differenza che d_{ik} è definita come la distanza minima da $i \in C$ al centroide che ha almeno una farmacia aperta nel turno k :

$$d_{ik} = \min_{j \in C} \{c_{ij} : j \in C \text{ e } j \text{ ha almeno una farmacia aperta nel turno } k\}$$