Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Progetto: Modelli di Progammazione Lineare Mista Intera

Luigi De Giovanni

Trovate di seguito due modelli alternativi per il problema della turnazione delle farmacie secondo la descrizione formale fornita dal docente, da considerare come riferimento per tutti, da adesso in avanti. Il primo modello si riferisce alla definizione di turni in termini di farmacie e il secondo modello alla definizione dei turni in termini di centroidi. In ogni caso, si tratta di modelli con un numero di variabili "gestibile" e la prossima consegna consiste nell'implementazione di almeno uno di questi modelli con le API di Cplex.

ATTENZIONE!

La **prossima scadenza** (terza consegna) è relativa alla consegna via email di un file compresso contente la vostra implementazione in C++ (con l'utilizzo delle API di Cplex) di UNO dei modelli sotto riportati. Si richiedono sorgenti e makefile che siano compilabili su una macchina linux del laboratorio TA.

Il termine è fissato per **lunedì 21 novembre, ore 9:00** (si consiglia comunque di anticipare il più possibile la consegna, per avere più tempo per la quarta e ultima fase del progetto, che è quella più impegnativa).

Nota: la formulazione con un numero "esponenziale" di variabili sarà presentata prossimamente e sarà la base delle successive fasi del progetto.

1 Dati di input

Si presentano due formulazioni alternative. Si richiede l'implentazione di ALMENO UNA tra esse, a scelta. La prima formulazione ricalca la definizione del problema adottata dalla maggior parte di voi (turni in termini di singole farmacie), la seconda (turni in termini di centroidi) è relativa alla nota nel paragrafo 1.4 del documento di descrizione di dettaglio dei problemi (progetto.1.descr.pdf).
Ricordiamo che i dati di input del problema sono:

- l'insieme dei centroidi C;
- il numero di utenti U_i e il numero di farmacie R_i per ogni centroide $i \in C$;
- le distanze c_{uv} per ogni coppia ordinata di centroidi (u, v) con $u, v \in C$;
- il numero di turni T.

Si richiede che i dati di input siano letti da un file di testo, in modo tale da poter utilizzare lo stesso eseguibile per risolvere diverse istanze (casi) dello stesso problema, definite da dati di input diversi. Si lascia libero il formato del file dei dati (cercate di includere nel file dei dati tutti i dati di input!). Per il test/debugging del modello, potete utilizzare una qualsiasi istanza da voi generata, con un numero sufficientemente piccolo di centroidi/farmacie, in modo da poter validare facilmente il modello.

Si noti come gli insiemi e i parametri descritti di seguito non corrispondano necessariamente con i dati di input, ma possano essere ottenuti da semplici pre-elaborazioni dei dati stessi, secondo le indicazioni contenute nel documento di descrizione di dettaglio dei problemi (progetto.1.descr.pdf).

2 Formulazione basata su singole farmacie

Insiemi

- C: insieme dei centroidi;
- F: insieme delle farmacie;

Parametri

- U_i: numero di utenti nel centroide $i \in C$;
- T: il numero dei turni;
- d_{ij}: distanza dal centroide $i \in C$ al centroide in cui si trova la farmacia $j \in F$.

Variabili

- y_{jk}: variabile binaria pari a 1 se la farmacia $j \in F$ apre nel turno $k \in \{1...T\}$, 0 altrimenti;
- x_{ijk}: variabile reale che indica la frazione di utenti del centroide $i \in C$ che si servono dalla farmacia $j \in F$ al turno $k \in \{1...T\}$.

Modello

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k=1}^{T} \sum_{i \in C} \sum_{j \in F} U_i d_{ij} x_{ijk} && && (1)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in F} x_{ijk} = 1 && \forall k \in \{1...T\}, i \in C && (2)\\
& \sum_{k=1}^{T} y_{jk} = 1 && \forall j \in F && (3)\\
& \sum_{j \in F} y_{jk} \geq \left\lfloor \frac{|F|}{T} \right\rfloor && \forall k \in \{1...T\} && (4)\\
& \sum_{j \in F} y_{jk} \leq \left\lceil \frac{|F|}{T} \right\rceil && \forall k \in \{1...T\} && (5)\\
& x_{ijk} \leq y_{jk} && \forall i \in C, j \in F, k \in \{1...T\} && (6)\\
& y_{jk} \in \{0, 1\} && \forall j \in F, k \in \{1...T\} && (7)\\
& x_{ijk} \in \mathbb{R}_+ && \forall i \in C, j \in F, k \in \{1...T\} && (8)
\end{aligned}
$$

Notare che il vincolo che ogni centroide si serva dalla farmacia aperta più vicina non è esplicitato nei vincoli ma è soddisfatto da ogni soluzione ottima: è la funzione obiettivo che, non essendoci vincoli legati alla congestione o alla capacità delle farmacie, eviterà di avere a valori diversi da 0 variabili x_{ijk} che non corrispondano alla distanza minima. Per motivi analoghi, anche se la variabile x è reale, assumerà solo valori 0 o 1 (a meno che non esistano farmacie aperte in centroidi entrambi alla minima distanza, nel qual caso, comunque, la soluzione è equivalente a una soluzione in cui si fissano tutte le x_{ijk} a 0, tranne 1 tra quelle a valore frazionario).

3 Formulazione basata su centroidi

Insiemi

- C: insieme dei centroidi;

Parametri

- U_i: numero di utenti nel centroide $i \in C$;
- R_i: numero di farmacie nel centroide $i \in C$;
- T: il numero dei turni;
- d_{ij}: distanza dal centroide $i \in C$ al centroide in cui si trova la farmacia $j \in F$.

Variabili

- y_{jk}: variabile intera pari al numero di farmacie del centroide $j \in C$ che sono aperte nel turno $k \in \{1...T\}$, 0 altrimenti;
- x_{ijk}: variabile reale che indica la frazione di utenti del centroide $i \in C$ che si servono nel centroide $j \in C$ al turno $k \in \{1...T\}$.

Modello

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k=1}^{T} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} U_i d_{ij} x_{ijk} & & \qquad (9) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in C} x_{ijk} = 1 & \forall k \in \{1...T\}, i \in C & \qquad (10) \\
& \sum_{k=1}^{T} y_{jk} = R_j & \forall j \in C & \qquad (11) \\
& \sum_{j \in C} y_{jk} \geq \left\lfloor \frac{\sum_{i \in C} R_i}{T} \right\rfloor & \forall k \in \{1...T\} & \qquad (12) \\
& \sum_{j \in C} y_{jk} \leq \left\lceil \frac{\sum_{i \in C} R_i}{T} \right\rceil & \forall k \in \{1...T\} & \qquad (13) \\
& x_{ijk} \leq y_{jk} & \forall i \in C, j \in C, k \in \{1...T\} & \qquad (14) \\
& y_{jk} \in \mathbb{Z}_+ & \forall j \in C, k \in \{1...T\} & \qquad (15) \\
& x_{ijk} \in \mathbb{R}_+ & \forall i \in C, j \in F, k \in \{1...T\} & \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Notare che anche in questo caso non ci si può servire da un centroide se non c'è almeno una farmacia aperta. Inoltre, la frazione di utenti sarà sempre compresa tra 0 e 1, visto il vincolo (10). Infine, per considerazioni sull'ottimalità, le x_{ijk} assumeranno solo valori 0 o 1 (a meno che non esistano farmacie aperte in centroidi entrambi alla minima distanza, nel qual caso, comunque la soluzione è equivalente a una soluzione in cui si fissano tutte le x_{ijk} a 0, tranne 1 tra quelle a valore frazionario).