Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Progetto: Metodo di soluzione basato su generazione di colonne

Luigi De Giovanni

Viene presentato un modello alternativo per il problema della turnazione delle farmacie che usa un numero "esponenziale" di variabili. Per la soluzione, non è appropriata un'implementazione diretta tramite le API di Cplex e, quindi, viene discussa un possibile metodo basato sulla generazione di colonne.

La **prossima scadenza è fissata per lunedì 12 dicembre alle 9:00** (quarta consegna) ed è relativa alla consegna via email di un file compresso contente:

- la vostra implementazione in C++ (con l'utilizzo delle API di Cplex) del metodo discusso in questo documento. Si richiedono sorgenti e makefile che siano compilabili su una macchina linux del laboratorio LabP036 (quindi con i path del laboratorio).
- (opzionale) l'implementazione di una metaeuristica per la soluzione del problema slave;
- (opzionale) l'implementazione di una metaeuristica per la soluzione del problema *complessivo* della turnazione delle farmacie (da confrontare con il metodo esatto bassato sull'implementazione con Cplex del modello con un numero polinomiale di variabili, e con l'euristica basata su generazione di colonne descritta in questo documento);
- (opzionale) delle istanze del problema di varie dimensioni (in termini di numero centroidi, numero di farmacie per centroide, numero turni) generate casualmente;
- un file pdf con un relazione sul lavoro svolto contenente:
  - la descrizione dei metodi implementati (con il dettaglio delle componenti che, in questo documento, sono solo accennate);
  - la descrizione delle implementazioni;

- la descrizione dei risultati computazionali sulle istanze fornite dal docente e sulle eventuali altre istanze casuali. I risultati devono riportare sinteticamente un confronto tra le varie tecniche sviluppate (modello della fase 3, metodo basato su generazione di colonne, eventuali euristiche/metaeuristiche).

È richiesto che *solo uno* tra i due approcci descritti di seguito (turni definiti per farmacie o per centroidi) venga sviluppato.

> **ATTENZIONE:** è previsto l'**esonero dalla consegna della relazione riassuntiva** del progetto per chi ha effettuato le precedenti consegne, effettuerà la presente consegna in tempo e sosterrà l'esame nella prima sessione (entro gennaio).

1 Notazione

Ricordiamo la notazione utilizzata per la descrizione formale del problema.

- C: insieme dei centroidi;
- F: insieme delle farmacie;
- U_i: numero di utenti nel centroide $i \in C$;
- R_i: numero di farmacie nel centroide $i \in C$;
- T: il numero dei turni;
- c_{ij}: distanza dal centroide $i \in C$ al centroide $j \in C$.
- d_{if}: distanza dal centroide $i \in C$ al centroide in cui si trova la farmacia $f \in F$.

Sia inoltre P l'insieme delle cardinalità ammesse per i turni, cioè

$$P = \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{i \in C} R_i}{T} \right\rfloor, \left\lceil \frac{\sum_{i \in C} R_i}{T} \right\rceil \right\}$$

2 Formulazione con variabili legate alle configurazioni dei turni in termini di *farmacie*

Un turno può essere visto come un qualsiasi sottinsieme di $p \in P$ farmacie. L'insieme dei possibili turni è quindi

$$J = \left\{ j \in 2^F \middle| |j| \in P \right\}.$$

A ciascun potenaiale turno $j \in J$ può essere associato un *costo* D_j che esprime la distanza complessiva percorsa dagli utenti nel caso il turno fosse effettivamente selezionato:

$$D_j = \sum_{i \in I} U_i \min_{f \in j} d_{if}.$$

Si noti che, dato il turno j, il costo D_j può essere agevolmente determinato.

Indichiamo con A_{jf} un parametro binario pari a 1 se la farmacia $f \in F$ apre nel turno $j \in J$, 0 altrimenti.

Introduciamo inoltre le seguenti variabili decisionali: z_j, variabile binaria pari a 1 se il turno potenziale $j \in J$ viene selezionato, 0 altrimenti.

Una possibile formulazione è la seguente:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & \displaystyle\sum_{j \in J} D_j z_j & & & & (1)\\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in J} A_{jf} z_j & = 1 & \forall & f \in F & (2)\\
& \displaystyle\sum_{j \in J} z_j & = T & & & (3)\\
& & z_j \leq 1 & \forall & j \in J & (4)\\
& & z_j \geq 0 & \forall & j \in J & (5)\\
& & z_j \in \mathbb{Z} & \forall & j \in J & (6)
\end{array}
$$

Si noti che il vincolo (4) è ridondante, visto (2).

Notare che i vincoli (2) possono essere sostituiti da "$\leq$", visto che conviene sempre aggiungere una farmacia a un turno, se si può (la funzione obiettivo potrebbe solo diminuire o, al limite, rimanere la stessa). Quindi se qualche farmacia rimane senza turno nella soluzione ottima è perché la soluzione è equivalente a una con la farmacia stessa assegnata a qualche turno. In particolare, possiamo mettere la farmacia che resta in un qualsiasi turno, rispettando la cardinalità dei turni (si tratta di ristabilire i turni potenziali come stabiliti dal problema slave, nel caso di approccio per generazione di colonne). Sarebbe interessante confrontare il comportamento del metodo proposto con i vincoli (21) scritti nei due modi.

Per la soluzione del modello, che ha un numero esponenziale di variabili, si propone la seguente euristica: si risolve prima il rilassamento continuo (eliminando il vincolo (6)) tramite generazione di colonne e, quindi, si risolve il problema a variabili intere ristretto alle colonne generate per l'ottimalità del rilassamento.

Il duale del modello (1)..(5) è il seguente:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & \displaystyle\sum_{f \in F} \pi_f + T\mu & & & & (7)\\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{f \in C} A_{jf} \pi_f + \mu & \leq D_j & \forall & j \in J & (8)\\
& & \pi_i \in \mathbb{R} & \forall & i \in C & (9)\\
& & \mu \in \mathbb{R} & & & (10)
\end{array}
$$

dove π sono le variabili duali associate ai vincoli (2) e μ è associata a (3).

Una volta risolto il problema (1)..(5) ristretto a un sottoinsieme di turni $J' \subset J$ (*restricted master problem*), e ottenuta la coppia di soluzioni ottime primale-duale $z^* - (\pi^*, \mu^*)$, individuare una colonna a costo ridotto negativo o, equivalentemente, un vincolo duale violato (*slave* o *pricing problem*) corrisponde a risolvere il seguente problema:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D(y) - \sum_{f \in F} \pi_f^* y_f - \mu^* && && (11)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{f \in C} y_f && \in P && (12)\\
& && y_f \in \{0,1\} \quad \forall \quad f \in F && (13)
\end{aligned}
$$

dove y èil vettore caratteristico del turno cercato (variabile z_j del problema master): y_i è 1 se la farmacia $f \in F$ appartiene al turno, 0 altrimenti (corrisponde a A_{jf}). Chiaramente la formulazione del problema slave data sopra non è lineare, visto che il costo del turno $D(y)$ dipende da y. Utilizzando delle variabili ulteriori x_{if} che indicano se il centroide i si serve dalla farmacia f nel turno descritta da y, si ottiene la seguente formulazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{in \in C} U_i \sum_{f \in F} d_{if} x_{if} - \sum_{f \in F} \pi_f^* y_f - \mu^* && && (14)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{f \in F} x_{if} = 1 && \forall \quad i \in C && (15)\\
& x_{ij} \leq y_f && \forall \quad i \in C, f \in F && (16)\\
& \left\lfloor \frac{\sum_{i \in C} R_i}{T} \right\rfloor \leq \sum_{f \in F} y_f \leq \left\lceil \frac{\sum_{i \in C} R_i}{T} \right\rceil && && (17)\\
& y_i \in \{0,1\} && \forall \quad i \in C && (18)\\
& x_{if} \in \mathbb{R}_+ && \forall \quad i \in C, f \in F && (19)
\end{aligned}
$$

Si noti che, analogamente a quanto visto per la formulazione del problema con un numero polinomiale di variabili, le variabili x possono essere considerate reali e positive (invece che binarie). (In effetti, il problema slave come sopra formulato richiama la formulazione "originaria": in un certo senso, abbiamo formulato il *pricing problem* nello spazio delle variabili "originarie", guardando alla nuova formulazione con un numero esponenziale di variabili come una "decomposizione").

Con i "caveat" visti a lezione, il problema slave potrebbe essere risolto con una (meta)euristica: si tratta di trovare la configurazione di un vettore a $|F|$ componenti binarie di cui esattamente $p \in P$ devono essere 1, che minimizzi la funzione (14). Questo punto, come detto sopra, è da considerarsi opzionale.

3 Formulazione con variabili legate alle configurazioni dei turni in termini di *centroidi*

Secondo le ipotesi definite nelle specifiche del problema, le farmacie all'interno dello stesso centroide sono indistuinguibili (la matrice delle distanze è definita tra centroidi, non ci sono problemi di congestione etc.). Pertanto, un turno può essere definito specificando, per ciascun centroide, il numero di farmacie che devono essere aperte nel turno stesso. Più formalmente, un vettore $\gamma \in \mathbb{Z}_+^{|C|}$ con componenti $\gamma_i, i \in C$ definisce una *configurazione di turno in termini di centroidi* se:

- per ogni centroide, non si considerano più farmacie di quelle ivi localizzate, cioè:

$$\gamma_i \leq R_i, \forall\, i \in C.$$

- la somma delle componenti del vettore è esattamente p, con $p \in P$, cioè:

$$\sum_{i \in C} \gamma_i \in P;$$

Definiamo con Γ, l'insieme di tutte le possibili configurazioni di turni in termini di centroidi. A ciascuna configurazione di turno $\gamma \in \Gamma$ può essere associato un *costo* D_γ che esprime la distanza complessiva percorsa dagli utenti nel caso la configurazione fosse effettivamente selezionata:

$$D_\gamma = \sum_{i \in I} U_i \min_{j \in C : \gamma_j > 0} c_{ij}.$$

Si noti che, data la configurazione γ, il costo D_γ può essere agevolmente determinato.

Indichiamo con $N_{\gamma i}$ il numero di farmacie aperte previste nella configurazione di turno $\gamma \in \Gamma$ per il centroide $i \in I$.

Introduciamo inoltre le seguenti variabili decisionali: z_γ, variabile intera e positiva che indica il numero di turni configurati secondo la configurazione $\gamma \in \Gamma$.

Una possibile formulazione è la seguente:

$$\min \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma z_\gamma \tag{20}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} N_{\gamma i} z_t = R_i \quad \forall \quad i \in C \tag{21}$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} z_\gamma = T \tag{22}$$

$$z_\gamma \geq 0 \quad \forall \quad \gamma \in \Gamma \tag{23}$$

$$z_\gamma \in \mathbb{Z} \quad \forall \quad \gamma \in \Gamma \tag{24}$$

Si noti che se $z_\gamma > 1$, allora ci sono più turni da configurare allo stesso modo, scegliendo cioè lo stesso numero di farmacie dagli stessi centroidi.

Notare che i vincoli (21) possono essere sostituiti da "$\leq$", visto che conviene sempre aggiungere una farmacia a un turno, se si può (la funzione obiettivo non può che migliorare o, al limite, rimanere la stessa). Quindi se qualche farmacia non viene assegnata a turni nella soluzione ottima, è perché la soluzione è equivalente (ad esempio abbiamo già una farmacia nello stesso centroide epr lo stesso turno) ad un'altra in cui tutte le farmacie sono inserite nei turni. Possiamo quindi inserire le farmacie mancanti nelle configurazioni selezionate, facendo attenzione a rispettare le cardinalità dei turni stessi (in un approccio per generazione di colonne, si tratterebbe di ristabilire i turni secondo le configurazioni generate). Potrebbe essere interessante confrontare il comportamento del metodo proposto con i vincoli (21) scritti nei due modi.

Per la soluzione del modello, che ha un numero esponenziale di variabili, si propone la seguente euristica: si risolve prima il rilassamento continuo (eliminando il vincolo (24)) tramite generazione di colonne e, quindi, si risolve il problema a variabili intere ristretto alle colonne generate per l'ottimalità del rilassamento.

Il duale del modello (20)..(23) è il seguente:

$$\max \quad \sum_{i \in C} R_i \pi_i + T\mu \tag{25}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in C} N_{\gamma i} \pi_i + \mu \leq D_\gamma \qquad \forall \quad \gamma \in \Gamma \tag{26}$$

$$\pi_i \in \mathbb{R} \qquad \forall \quad i \in C \tag{27}$$

$$\mu \in \mathbb{R} \tag{28}$$

dove π sono le variabili duali associate ai vincoli (21) e μ è associata a (22).

Una volta risolto il problema (20)..(23) ristretto a un sottoinsieme di turni $\Gamma' \subset \Gamma$ (*restricted master problem*), e ottenuta la coppia di soluzioni ottime primale-duale $z^* - (\pi^*, \mu^*)$, individuare una colonna a costo ridotto negativo o, equivalentemente, un vincolo duale violato (*slave* o *pricing problem*) corrisponde a risolvere il seguente problema:

$$\min \quad D(y) - \sum_{i \in C} \pi_i^* y_i - \mu^* \tag{29}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in C} y_i \in P \tag{30}$$

$$y_i \leq R_i \qquad \forall \quad i \in C \tag{31}$$

$$y_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall \quad i \in C \tag{32}$$

dove y è un vettore di variabili intere e positive che descrive la configurazione del turno cercato (variabile z_γ del problema master): y_i è il numero di farmacie per il centroide i (corrisponde a $N_{\gamma i}$). Chiaramente la formulazione del problema slave data sopra non è lineare, visto che il costo della configurazione $D(y)$ dipende da y. Utilizzando delle variabili ulteriori x_{ij} che indicano se il centroide i si serve da una farmacia del centroide j nella configurazione di turno descritta da y, si ottiene la seguente formulazione lineare:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{in \in C} U_i \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i \in C} \pi_i^* y_i - \mu^* & & (33)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in C} x_{ij} = 1 & \forall \quad i \in C & \quad (34)\\
& x_{ij} \leq y_j & \forall \quad i \in C, j \in C & \quad (35)\\
& \left\lfloor \frac{\sum_{i \in C} R_i}{T} \right\rfloor \leq \sum_{i \in C} y_i \leq \left\lceil \frac{\sum_{i \in C} R_i}{T} \right\rceil & & \quad (36)\\
& y_i \leq R_i & \forall \quad i \in C & \quad (37)\\
& y_i \in \mathbb{Z}_+ & \forall \quad i \in C & \quad (38)\\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+ & \forall \quad i \in C, j \in C & \quad (39)
\end{aligned}$$

Si noti che, analogamente a quanto visto per la formulazione del problema con un numero polinomiale di variabili, le variabili x possono essere considerate reali e positive (invece che binarie). (In effetti, il problema slave come sopra formulato richiama la formulazione "originaria": in un certo senso, abbiamo formulato il *pricing problem* nello spazio delle variabili "originarie", guardando alla nuova formulazione con un numero esponenziale di variabili come una "decomposizione").

Con i "caveat" visti a lezione, il problema slave potrebbe essere risolto con una (meta)euristica: si tratta di trovare la configurazione di un vettore a $|C|$ componenti intere di cui esattamente $p \in P$ devono essere comprese tra 1 e R_i, che minimizzi la funzione (33). Questo punto, come detto sopra, è da considerarsi opzionale.

4 Prove computazionali

L'obiettivo è di confrontare le diverse tecniche sviluppate (almeno due, il modello con un numero polinomiale di variabili risolto con Cplex, e il metodo basato su generazione di colonne con soluzione esatta del problema di pricing tramite modello implementato in Cplex) in termini di:

- tempi di calcolo (evidenziando, per il metodo descritto in questo documento, oltre al tempo totale, il tempo complessivamente speso nel problema di pricing e il tempo per la soluzione finale del problema a variabili intere);
- valore della soluzione trovata (il secondo metodo è un'euristica);
- eventuali differenze per diverse istanze, al variare delle dimensioni (numero di farmacie/centroidi, numero di turni).

Vengono forniti allo scopo i dati di alcune istanze significative di piccole e di medie dimensioni. Si forniscono dei dati "grezzi", che ciascuno potrà porre nel proprio formato di input. Dai dati, possono essere ricavate le seguenti istanze:

1. *pharma_12F*: un caso di studio di piccole dimensioni, per il quale è disponibile una soluzione ottima;

2. *pharma_20C_23F*: un caso di studio ricavato da un sottoinsieme delle farmacie nella regione Friuli-Venezia Giulia (a cura del prof. Serafini dell'Università di Udine);

3. *padova_comune*: caso del comune di Padova. Si richiede di considerare un centroide per ogni farmacia. Gli U_i possono essere ricavati distribuendo gli abitanti dei quartieri (disponibili nel foglio "Lista_F") in modo uniforme tra i centroidi delle farmacie dello stesso quartiere. Le distanze sono indicate nel foglio "matr_pd_com". È disponibile la soluzione proposta dall'ordine dei farmacisti con 11 turni (foglio "soluzioni"), che può essere utile per confronti;

4. *padova_limitrofi*: caso dei comuni limitrofi a Padova. Si richiede di considerare un centroide per ogni farmacia. Gli U_i possono essere posti convenzionalmente tutti a 1, oppure ricavati distribuendo gli abitanti dei comuni (da cercare su internet) in modo uniforme tra i centroidi delle farmacie dello stesso comune. Le distanze sono indicate nel foglio "matr_pd_limitr". È disponibile la soluzione proposta dall'ordine dei farmacisti con 11 turni (foglio "soluzioni"), che non è ammissibile secondo la nostra definizione dei turni, ma può essere utile per confronti;

5. *padova_tutto*: si tratta di mettere insieme i due casi precedenti (bisognerebbe recuperare le distanze tra i centroidi del comune di padova e dei comuni limitrofi, non forniti). Questo punto è opzionale.

Oltre alle istanze ricavate dai dati forniti, è possibile generare casualmente istanze di diverse dimensioni. Anche questo punto è opzionale.

Dove non specificato, si consideri che la popolazione di ogni centroide è pari alla stessa costante. Per quanto riguarda il numero di turni, si chiede di fare dei test con varie possibilità (ad esempio, per il caso di Padova, si fornisce una possibile soluzione con 11 turni, quella proposta dall'ordine dei farmacisti) per valutare, al variare del numero di turni, i cambiamenti del valore della funzione obiettivo, e delle prestazioni comparative dei diversi metodi.