

Metodi e Modelli per l'Ottimizzazione Combinatoria

Progetto – Modelli di Programmazione Lineare

Luigi De Giovanni

Si propongono due formulazioni per il problema della configurazione di reti wireless: il primo per il modello di connessione con un solo server, il secondo, più generale, per il modello di connessione con server dormienti. La prossima consegna consiste nell'implementazione di uno di questi modelli (meglio quello più generale, ma va bene anche il primo) con le API di Cplex.

ATTENZIONE!

La **prossima scadenza** (terza consegna) è relativa alla consegna via email di un file compresso contenente la vostra implementazione in C++ (con l'utilizzo delle API di Cplex) di almeno uno dei modelli sotto riportati. Si richiedono sorgenti e makefile che siano compilabili su una macchina linux del laboratorio TA, e una piccola relazione con la descrizione delle scelte implementative, riportando, ad esempio, come create le variabili, in che posizione si trovano e le modalità di accesso.

Il termine è fissato per **lunedì 3 dicembre, ore 9:00**.

1 Dati di input

Si riepilogano i dati di input per il problema di configurazione di reti wireless, così come riportati nel documento di specifica.

Attenzione! Si richiede che i dati di input siano letti da un file di testo, in modo tale da poter utilizzare lo stesso eseguibile per risolvere diverse istanze (casi) dello stesso problema, definite da dati di input diversi. Si lascia libero il formato del file dei dati (cercate di includere nel file dei dati tutti i dati di input!). Per il test/debugging del modello, potete utilizzare l'istanza fornita come esempio in sede di specifica, oltre a una qualsiasi altra istanza da voi generata (eventualmente con un numero sufficientemente piccolo di nodi, in modo da poter validare facilmente il modello).

1.1 Riepilogo dei dati forniti dal committente: connessione con un server

Si fornisce un elenco sintetico dei parametri forniti dal committente. Si assumeranno le seguenti unità di misura:

- unità di tempo: secondi [s];
- unità di informazione: byte [B]
- unità di carica: joule [J]
- numero di pacchetti [pkt];

1.1.1 Connessione con un solo server

I parametri necessari per descrivere un'istanza del problema di configurazione di reti wireless ad hoc con modello di connessione a un solo server sono:

- N : insieme dei dispositivi (detti anche nodi);
- X_v e Y_v , per ogni $v \in N$: coordinate in un sistema cartesiano bidimensionale della posizione del nodo v [metri];
- R_v , per ogni $v \in N$: raggio di trasmissione del nodo v [metri];
- A_v , per ogni $v \in N$: carica iniziale del nodo v [J];
- T_C : intervallo di tempo tra due trasmissioni di pacchetti di stato da un client al server [s];
- D_v^C , per ogni $v \in N$: dimensione del pacchetto con le informazioni di stato spedite dal nodo v [B/pkt];

- T_S : intervallo di tempo tra due trasmissioni di pacchetti di aggiornamento dal server a ciascun client [s];
- D_v^S , per ogni $v \in N$: dimensione del pacchetto con le informazioni di aggiornamento destinate al nodo v [B/pkt];
- P_v^C , per ogni $v \in N$: consumo per unità di tempo per le elaborazioni di v come client [J/s];
- P_v^S , per ogni $v \in N$: consumo aggiuntivo per unità di tempo per le elaborazioni di v come server [J/s];

Inoltre, indicando con E l'insieme dei link determinabile in base ai parametri X_v , Y_v e R_v , il committente fornisce:

- M_{ij}^T , per ogni $(i, j) \in E$: consumi per unità di informazione trasmessa sul link (i, j) [J/B];
- C_{ij}^T , per ogni $(i, j) \in E$: consumi per pacchetto trasmesso sul link (i, j) [J];
- M_{ij}^R , per ogni $(i, j) \in E$: consumi per unità di informazione ricevuta sul link (i, j) [J/B];
- C_{ij}^R , per ogni $(i, j) \in E$: consumi per pacchetto ricevuto sul link (i, j) [J];
- U_{ij} , per ogni $i \in N$, $j \in N$: banda disponibile per le comunicazioni di i a j , qualora il link (i, j) fosse effettivamente disponibile [B/s].

1.2 Riepilogo dei dati forniti dal committente: estensione al caso con server dormienti

Nel caso si voglia determinare la configurazione con l'utilizzo di server dormienti, il committente fornisce:

- tutti i parametri per il caso di connessione con un solo server;
- L : numero di server che si alternano in round-robin [numero intero];
- T_H : intervallo di tempo tra due cambiamenti di server attivo [s];
- T_D : intervallo tra due trasmissioni di pacchetti di sincronizzazione dal server attivo a ciascuno dei server dormienti [s];
- D_v^D , per ogni $v \in N$: dimensione del pacchetto con le informazioni di sincronizzazione inviate dal server attivo al nodo v configurato come server dormiente [B/pkt];
- P_v^D , per ogni $v \in N$: consumo aggiuntivo per unità di tempo per le elaborazioni del nodo v come server dormiente [J/s].

2 Formulazioni in Programmazione Lineare Mista-Intera

Si riportano tre formulazioni: la prima relativa al caso con un solo server, la seconda e la terza relative al caso con server dormienti. La seconda formulazione (NON LINEARE) è riportata a solo titolo esplicativo, come introduzione alla terza formulazione. Pertanto, la seconda formulazione NON deve essere implementata.

Nota: gli insiemi e i parametri descritti di seguito non corrispondano necessariamente con i dati di input, ma possono essere ottenuti da semplici pre-elaborazioni dei dati stessi, secondo le indicazioni contenute nel documento di descrizione di dettaglio dei problemi (progetto.1.descr.pdf) e riportate all'occorrenza.

2.1 Formulazione: connessione con un solo server

Insiemi

- N : insieme dei dispositivi;
- E : insieme delle possibili connessioni (link), corrispondenti a coppie ordinate $(i, j) \in N \times N$ – ottenibili dalle posizioni dei nodi, tramite il calcolo della distanza euclidea $d(i, j)$ e il confronto con le soglie R_i e R_j , cioè $E = \{(i, j) | d(i, j) \leq R_i \wedge d(i, j) \leq R_j\}$.

Parametri

- B_v^C : banda in [pkt/s] richiesta da $v \in N$ come client, per il traffico diretto al server – calcolabile come $1/T_C$;
- B_v^S : banda in [pkt/s] richiesta dal server per il traffico diretto al client $i \in N$ – calcolabile come $1/T_S$;
- U_{ij} : banda massima disponibile sul link $(i, j) \in E$ in [B/s] – dato fornito direttamente;
- J_{ijv}^{CT} : consumo in [J/pkt] per pacchetto di stato originato dal client $v \in N$ e in trasmissione sul link $(i, j) \in E$ (consumi del nodo i) – ottenibile dalla formula $J_{ijv}^{CT} = M_{ij}^T \cdot D_v^C + C_{ij}^T$;
- J_{ijv}^{CR} : consumo in [J/pkt] per pacchetto di stato originato dal client $v \in N$ e in ricezione sul link $(i, j) \in E$ (consumi del nodo j) – ottenibile dalla formula $J_{ijv}^{CR} = M_{ij}^R \cdot D_v^C + C_{ij}^R$;
- J_{ijv}^{ST} : consumo in [J/pkt] per pacchetto di aggiornamento destinato al client $v \in N$, originato dal server e in trasmissione sul link $(i, j) \in E$ (consumi del nodo i) – ottenibile dalla formula $J_{ijv}^{ST} = M_{ij}^T \cdot D_v^S + C_{ij}^T$;

- J_{ijv}^{SR} : consumo in [J/pkt] per pacchetto di aggiornamento destinato al client $v \in N$, originato dal server e in ricezione sul link $(i, j) \in E$ (consumi del nodo j) – ottenibile dalla formula $J_{ijv}^{SR} = M_{ij}^R \cdot D_v^S + C_{ij}^R$;
- A_v : livello iniziale in [J] della batteria del nodo $v \in N$ – dato fornito direttamente;
- P_v^C : consumo in [J/s] per le elaborazioni del nodo $v \in N$ come client – dato fornito direttamente;
- P_v^S : consumo in [J/s] per le elaborazioni del nodo $v \in N$ come server – dato fornito direttamente;
- ϵ : costante molto piccola.

Variabili

- σ_i : variabile binaria pari a 1 se il nodo $i \in N$ è configurato come server, 0 altrimenti;
- x_{ij}^v : variabile reale che indica la percentuale [numero puro] di pacchetti di stato originati dal client v e destinati al nodo server che, mediamente, passano sul link $(i, j) \in E$;
- y_{ij}^v : variabile reale che indica la percentuale [numero puro] di pacchetti di aggiornamento originati dal server e destinati al client v che, mediamente, passano sul link $(i, j) \in E$;
- ζ_i : consumo medio complessivo in [J/s] del nodo $i \in N$;
- γ_i^T : consumo medio in [J/s] per le trasmissioni del nodo $i \in N$;
- γ_i^R : consumo medio in [J/s] per le ricezioni del nodo $i \in N$;
- α : variabile reale legata alla *frequenza di spegnimento* del nodo più sfavorito (per ragioni tecniche, invece di massimizzare la durata della batteria del nodo critico, si minimizza il suo inverso).

Modello

Il modello è riportato in Figura 1. Riportiamo alcuni commenti:

- nel problema, l'obiettivo è la massimizzazione della minima durata della batteria di un qualsiasi nodo. In funzione dei parametri e delle variabili introdotte, la durata δ_i della batteria del nodo $i \in N$ può essere espressa come

$$\delta_i = \frac{A_i}{\zeta_i}.$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha + \epsilon \left(\sum_{v \in N} \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}^v + y_{ij}^v \right) & (1) \\
 \text{s.t.} \quad & A_i \alpha \geq \zeta_i & \forall i \in N & (2) \\
 & P_i^C + P_i^S \sigma_i + \gamma_i^T + \gamma_i^R = \zeta_i & \forall i \in N & (3) \\
 & \sum_{i \in N} \sigma_i = 1 & & (4) \\
 \sum_{(k,j) \in E} x_{kj}^v - \sum_{(i,k) \in E} x_{ik}^v &= \begin{cases} 1 - \sigma_k & \text{if } k = v \\ -\sigma_k & \text{otherwise} \end{cases} & \forall k \in N, v \in N & (5) \\
 \sum_{(k,j) \in E} y_{kj}^v - \sum_{(i,k) \in E} y_{ik}^v &= \begin{cases} -(1 - \sigma_k) & \text{if } k = v \\ \sigma_k & \text{otherwise} \end{cases} & \forall k \in N, v \in N & (6) \\
 \sum_{v \in N} (B_v^C \cdot D_v^C) x_{ij}^v + (B_v^S \cdot D_v^S) y_{ij}^v &\leq U_{ij} & \forall (i,j) \in E & (7) \\
 \sum_{v \in N} \sum_{(i,k) \in E} (J_{ikv}^{CR} \cdot B_v^C) x_{ik}^v + (J_{ikv}^{SR} \cdot B_v^S) y_{ik}^v &= \gamma_k^R & \forall k \in N & (8) \\
 \sum_{v \in N} \sum_{(k,j) \in E} (J_{kjh}^{CT} \cdot B_v^C) x_{kj}^v + (J_{kjh}^{ST} \cdot B_v^S) y_{kj}^v &= \gamma_k^T & \forall k \in N & (9) \\
 \alpha &\in \mathbb{R} & & (10) \\
 \zeta_i, \gamma_i^T, \gamma_i^R &\in \mathbb{R}_+ & \forall i \in N & (11) \\
 \sigma_i &\in \{0, 1\} & \forall i \in N & (12) \\
 x_{ij}^v, y_{ij}^v &\in \mathbb{R}_+ & \forall v \in N, (i,j) \in E & (13)
 \end{aligned}$$

Figure 1: Formulazione per il caso di connessione con un solo server.

Pertanto, la funzione obiettivo sarebbe

$$\max \min_{i \in N} \delta_i$$

o, equivalentemente,

$$\max_{\delta \in \mathbb{R}} \delta, \quad \text{s.t. } \delta \leq \frac{A_i}{\zeta_i} \quad \forall i \in N.$$

L'espressione non è lineare per la presenza delle variabili ζ_i a denominatore. Inoltre, non è possibile linearizzare passando ζ_i a sinistra, in quanto si otterrebbe un termine quadratico $\delta_i \zeta_i$. Pertanto trasformiamo la funzione obiettivo introducendo una variabile

$$\alpha_i = \frac{1}{\delta_i} = \frac{\zeta_i}{A_i}.$$

In questo modo, la funzione obiettivo diventa

$$\min \max_{i \in N} \alpha_i$$

e può essere scritta in forma lineare come nel modello.

- La funzione obiettivo (1) contiene un termine *opzionale* che minimizza il traffico totale sulla rete. Questa componente tecnica serve per evitare che siano generate circolazioni (flussi su un ciclo) inutili, visto che alcuni nodi potrebbero avere batteria da “sprecare” rispetto a quello che risulterà il più sfavorito, e del traffico “inutile” potrebbe essere gestito a parità di funzione obiettivo.
- Nei vincoli (5) di conservazione del flusso di pacchetti dal client k al server configurato, il traffico NON viene generato se il nodo k è il server stesso. Infatti, se, usando come termine noto 1 invece di $(1 - \sigma_k)$ nel vincolo del caso $k = v$, si generasse questo traffico, non si avrebbe nessun altro vincolo sul nodo k stesso per la ricezione dello stesso traffico (visto che se $k = v$ si ha solo il vincolo in questione), introducendo uno sbilanciamento che rende il modello inammissibile. Analogamente, nei vincoli (6) di conservazione del flusso di pacchetti dal server verso il client k , il nodo k non riceve traffico se k è lo stesso server (non avendo il corrispondente vincolo di generazione del flusso quando $k = v$, analogamente a quanto detto prima, si avrebbe sbilanciamento).

2.2 Formulazione: connessione con un server e server dormienti, modello NON LINEARE

Di seguito riportiamo un modello ottenuto come estensione del modello precedente. Tale estensione però, porta alla definizione di vincoli non lineari, in particolare dei termini quadratici che coinvolgono variabili binarie. Vedremo successivamente come questa formulazione possa essere linearizzata.

Insiemi

Vedi formulazione del caso con un solo server.

Parametri

- Tutti i parametri definiti per il caso con un solo server;
- L : numero di server in round robin (ci saranno L turni, ciascun server dormiente diventerà attivo in uno solo dei turni, i turni si ripetono ciclicamente) – dato fornito direttamente;
- P_v^D : consumo in [J/s] per le elaborazioni del nodo $v \in N$ come server dormiente – dato fornito direttamente;
- J_{ijv}^{DT} : consumo in [J/pkt] per pacchetto di sincronizzazione destinato al nodo $v \in N$ configurato come server dormiente, originato dal server e in trasmissione sul link $(i, j) \in E$ (consumi del nodo i) – ottenibile dalla formula $J_{ijv}^{DT} = M_{ij}^T \cdot D_v^D + C_{ij}^T$;
- J_{ijv}^{DR} : consumo in [J/pkt] per pacchetto di sincronizzazione destinato al nodo $v \in N$ configurato come server dormiente, originato dal server e in ricezione sul link $(i, j) \in E$ (consumi del nodo j) – ottenibile dalla formula $J_{ijv}^{DR} = M_{ij}^R \cdot D_v^D + C_{ij}^R$;

Variabili

- ρ_i : variabile binaria pari a 1 se il nodo $i \in N$ è configurato come uno dei server in round robin, 0 altrimenti;
- σ_i^l : variabile binaria pari a 1 se il nodo $i \in N$ è configurato come server al turno $l = 1..L$, 0 altrimenti;
- x_{ij}^{lv} : variabile reale che indica la percentuale [numero puro] di pacchetti di stato che, nel turno $l = 1..L$, sono originati dal client v e destinati al nodo server, e che, mediamente, passano sul link $(i, j) \in E$;
- y_{ij}^{lv} : variabile reale che indica la percentuale [numero puro] di pacchetti di aggiornamento che, nel turno $l = 1..L$, sono originati dal server e destinati al client v , e che, mediamente, passano sul link $(i, j) \in E$;
- z_{ij}^{lv} : variabile reale che indica la percentuale [numero puro] di pacchetti di sincronizzazione che, nel turno $l = 1..L$, sono originati dal server e destinati al nodo v configurato come server dormiente, e che, mediamente, passano sul link $(i, j) \in E$;
- ζ_i : consumo medio in [J/s] del nodo $i \in N$;
- γ_i^T : consumo medio in [J/s] per le trasmissioni del nodo $i \in N$;
- γ_i^R : consumo medio in [J/s] per le ricezioni del nodo $i \in N$;

- α : variabile reale legata alla *frequenza di spegnimento* del nodo più sfavorito (per ragioni tecniche, invece di massimizzare la durata della batteria del nodo critico, si minimizza il suo inverso).

Un modello NON LINEARE

Il modello è riportato in Figura 2. Alcune osservazioni:

- il modello NON È LINEARE, a causa dei vincoli (22).
- Nei vincoli (22) il termine di bilanciamento, in entrambi i casi previsti, andrebbe corretto per tenere conto che la variabile ρ_v potrebbe valere 1 anche nello scenario in cui v agisce effettivamente da server, caso in cui non andrebbe generato / ricevuto il relativo traffico. Quindi, a rigore, ρ_v andrebbe ulteriormente moltiplicato per il termine $(1 - \sigma_v^l)$. Tuttavia, considerando che le variabili coinvolte sono binarie, tale termine può essere omesso in quanto:
 - nel caso $k = v$ si avrebbe un termine $\rho_v(1 - \sigma_v^l)(1 - \sigma_k^l) = \rho_v(1 - \sigma_k^l)^2 = \rho_v(1 - \sigma_k^l)$, se si considerano i soli valori binari;
 - nel caso $k \neq v$, i prodotti $\rho_v(1 - \sigma_v)\sigma_k$ e $\rho_v\sigma_k$ sono diversi, con variabili binarie, solo se $\sigma_v^l = \sigma_k^l = 1$, caso escluso dai vincoli (18).
- I vincoli (19) garantiscono che, a ogni scenario, si scelga un server “attivo” diverso.

2.3 Formulazione: caso con un server e server dormienti, modello lineare

Il modello presentato nella sezione precedente può essere linearizzato con tecniche standard, introducendo delle variabili binarie a tre indici e opportuni vincoli che le leghino ai valori delle variabili di cui rappresentano il prodotto, e che garantiscano i flussi desiderati (per evitare soluzioni ammissibili con variabili tutte a 0). Si tratterebbe di variabili binarie del tipo w_{vk}^l , pari a 1 se, nel turno l , k è server attivo et v è server dormiente.

Possiamo tuttavia sfruttare la struttura di flusso per derivare un modello lineare che non introduca ulteriori variabili binarie, ma soltanto ulteriori variabili di flusso. Si tratta di estendere la rete $G = (N, A)$ come segue:

- si considera un nodo fittizio aggiuntivo \bar{s} che rappresenti il server nelle funzioni di origine o destinazione dei flussi;
- si collega il nodo fittizio \bar{s} con tutti i nodi effettivi della rete $i \in N$, con dei link fittizi di tipo (\bar{s}, i) e (i, \bar{s}) ;
- a ogni turno, si attiva uno ed un solo tra i link fittizi (e ogni link fittizio può essere attivo in al più un turno): il link attivo individua il nodo che agisce da server.

$$\min \alpha \quad + \epsilon \left(\sum_{l=1}^L \sum_{v \in N} \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}^{lv} + y_{ij}^{lv} + z_{ij}^{lv} \right) \quad (14)$$

$$\text{s.t. } A_i \alpha \geq \zeta_i \quad \forall i \in N \quad (15)$$

$$P_i^C + \frac{L-1}{L} P_i^D \rho_i + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (P_i^S \sigma_i^l + \gamma_{li}^T + \gamma_{li}^R) = \zeta_i \quad \forall i \in N \quad (16)$$

$$\sigma_i^l \leq \rho_i \quad \forall i \in N, l = 1..L \quad (17)$$

$$\sum_{i \in N} \sigma_i^l = 1 \quad \forall l = 1..L \quad (18)$$

$$\sum_{l=1}^L \sigma_i^l \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (19)$$

$$\sum_{(k,j) \in E} x_{kj}^{lv} - \sum_{(i,k) \in E} x_{ik}^{lv} = \begin{cases} (1 - \sigma_k^l) & \text{if } k = v \\ -\sigma_k^l & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in N, v \in N, l = 1..L \quad (20)$$

$$\sum_{(k,j) \in E} y_{kj}^{lv} - \sum_{(i,k) \in E} y_{ik}^{lv} = \begin{cases} -(1 - \sigma_k^l) & \text{if } k = v \\ B_v^S \sigma_k^l & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in N, v \in N, l = 1..L \quad (21)$$

$$\sum_{(k,j) \in E} z_{kj}^{lv} - \sum_{(i,k) \in E} z_{ik}^{lv} = \begin{cases} -\rho_v (1 - \sigma_k^l) & \text{if } k = v \\ \rho_v \sigma_k^l & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in N, v \in N, l = 1..L \quad (22)$$

$$\sum_{v \in N} (B_v^C \cdot D_v^C) x_{ij}^{lv} + (B_v^S \cdot D_v^S) y_{ij}^{lv} + (B_v^D \cdot D_v^D) z_{ij}^{lv} \leq U_{ij} \quad \forall (i,j) \in E, l = 1..L \quad (23)$$

$$\sum_{v \in N} \sum_{(i,k) \in E} (J_{ikv}^{CR} \cdot B_v^C) x_{ik}^{lv} + (J_{ikv}^{SR} \cdot B_v^S) y_{ik}^{lv} + (J_{ikv}^{DR} \cdot B_v^D) z_{ik}^{lv} = \gamma_{ik}^R \quad \forall k \in N, l = 1..L \quad (24)$$

$$\sum_{v \in N} \sum_{(k,j) \in E} (J_{kqv}^{CT} \cdot B_v^C) x_{kj}^{lv} + (J_{kqv}^{ST} \cdot B_v^S) y_{kj}^{lv} + (J_{kqv}^{DT} \cdot B_v^D) z_{kj}^{lv} = \gamma_{ik}^T \quad \forall k \in N, l = 1..L \quad (25)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad (26)$$

$$\zeta_i \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i \in N \quad (27)$$

$$\gamma_{li}^T, \gamma_{li}^R \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i \in N, l = 1..L \quad (28)$$

$$\sigma_i^l \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, l = 1..L \quad (29)$$

$$\rho_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \quad (30)$$

$$x_{ij}^{lv}, y_{ij}^{lv}, z_{ij}^{lv} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall v \in N, (i,j) \in E, l = 1..L \quad (31)$$

Figure 2: Form. NON LINEARE per il caso di connessione con server dormienti.

Complessivante, il modello è il seguente.

Insiemi

- insiemi del modello precedente;
- $\bar{N} = N \cup \{\bar{s}\}$: insieme dei dispositivi esteso con il server fittizio \bar{s} ;
- $\bar{E} = E \cup \{(\bar{s}, i), (i, \bar{s}) \mid i \in N\}$.

Parametri

- parametri del modello precedente;
- M : costante sufficientemente grande;

Variabili

- variabili del modello precedente, **con le variabili di flusso estese a \bar{E} (vedi quantificatori nei domini del modello)**.

Un modello lineare

Il modello è riportato in Figura 3. Alcune osservazioni:

- La non linearità si evita facendo in modo che comunque partano le comunicazioni da e verso il server. I vincoli (36) e (41) assicurano che tutto il traffico ricevuto (risp. trasmesso) da \bar{s} sia anche ricevuto (risp. trasmesso) da un solo server per turno.
- I vincoli di capacità sono diversi per gli archi che rappresentano link fittizi (vincoli(41)) e per gli archi relativi a link reali (vincoli(42)).
- Il calcolo dei consumi nei vincoli (43) e (44) non tiene conto delle trasmissioni sui link fittizi (sommatorie su E e non su \bar{E}).
- I vincoli (40) assicurano che il traffico da server attivo a server dormiente sia generato e ricevuto solo se la destinazione v del traffico stesso è server in almeno uno (e per i vincoli (37) al massimo uno) dei turni.
- I vincoli (40) fanno in modo che tutti i server (dormienti e attivo) ricevano il traffico dal server attivo. Sia k il server attivo nel turno l . Essendo il link tra \bar{s} e k l'unico link con capacità, il traffico da \bar{s} a k può essere instradato a consumo nullo (o meglio, tale consumo non viene preso in considerazione nei vincoli (44)). Per gli altri server dormienti, il flusso dovrà uscire comunque dal nodo k su archi diretti verso nodi effettivi, e i relativi consumi saranno conteggiati.
- Il calcolo del bottleneck con i vincoli (33) e (34) non considera il nodo fittizio \bar{s} (vincoli quantificati su N e non su \bar{N}).

$$\min \alpha \quad + \epsilon \left(\sum_{l=1}^L \sum_{v \in N} \sum_{(i,j) \in \bar{E}} x_{ij}^{lv} + y_{ij}^{lv} + z_{ij}^{lv} \right) \quad (32)$$

$$\text{s.t. } A_i \alpha \geq \zeta_i \quad \forall i \in N \quad (33)$$

$$P_i^C + \frac{L-1}{L} P_i^D \rho_i + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (P_i^S \sigma_i^l + \gamma_{li}^T + \gamma_{li}^R) = \zeta_i \quad \forall i \in N \quad (34)$$

$$\sigma_i^l \leq \rho_i \quad \forall i \in N, l = 1..L \quad (35)$$

$$\sum_{i \in N} \sigma_i^l = 1 \quad \forall l = 1..L \quad (36)$$

$$\sum_{l=1}^L \sigma_i^l \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (37)$$

$$\sum_{(k,j) \in \bar{E}} x_{kj}^{lv} - \sum_{(i,k) \in \bar{E}} x_{ik}^{lv} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = v \\ -1 & \text{if } k = \bar{s} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \bar{N}, v \in N, l = 1..L \quad (38)$$

$$\sum_{(k,j) \in \bar{E}} y_{kj}^{lv} - \sum_{(i,k) \in \bar{E}} y_{ik}^{lv} = \begin{cases} -1 & \text{if } k = v \\ 1 & \text{if } k = \bar{s} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \bar{N}, v \in N, l = 1..L \quad (39)$$

$$\sum_{(k,j) \in \bar{E}} z_{kj}^{lv} - \sum_{(i,k) \in \bar{E}} z_{ik}^{lv} = \begin{cases} -\rho_v & \text{if } k = v \\ \rho_v & \text{if } k = \bar{s} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \bar{N}, v \in N, l = 1..L \quad (40)$$

$$x_{k\bar{s}}^{lv} + x_{\bar{s}k}^{lv} + y_{k\bar{s}}^{lv} + y_{\bar{s}k}^{lv} + z_{k\bar{s}}^{lv} + z_{\bar{s}k}^{lv} \leq M \sigma_k^l \quad \forall k \in N, v \in N, l = 1..L \quad (41)$$

$$\sum_{v \in N} (B_v^C \cdot D_v^C) x_{ij}^{lv} + (B_v^S \cdot D_v^S) y_{ij}^{lv} + (B_v^D \cdot D_v^D) z_{ij}^{lv} \leq U_{ij} \quad \forall (i,j) \in E, l = 1..L \quad (42)$$

$$\sum_{v \in N} \sum_{(i,k) \in E} (J_{ikv}^{CR} \cdot B_v^C) x_{ik}^{lv} + (J_{ikv}^{SR} \cdot B_v^S) y_{ik}^{lv} + (J_{ikv}^{DR} \cdot B_v^D) z_{ik}^{lv} = \gamma_{ik}^R \quad \forall k \in N, l = 1..L \quad (43)$$

$$\sum_{v \in N} \sum_{(k,j) \in E} (J_{kqv}^{CT} \cdot B_v^C) x_{kj}^{lv} + (J_{kqv}^{ST} \cdot B_v^S) y_{kj}^{lv} + (J_{kqv}^{DT} \cdot B_v^D) z_{kj}^{lv} = \gamma_{ik}^T \quad \forall k \in N, l = 1..L \quad (44)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad (45)$$

$$\zeta_i \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i \in N \quad (46)$$

$$\gamma_{li}^T, \gamma_{li}^R \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i \in N, l = 1..L \quad (47)$$

$$\sigma_i^l \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, l = 1..L \quad (48)$$

$$\rho_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \quad (49)$$

$$x_{ij}^{lv}, y_{ij}^{lv}, z_{ij}^{lv} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall v \in N, (i,j) \in \bar{E}, l = 1..L \quad (50)$$

Figure 3: Form. LINEARE per il caso di connessione con server dormienti.